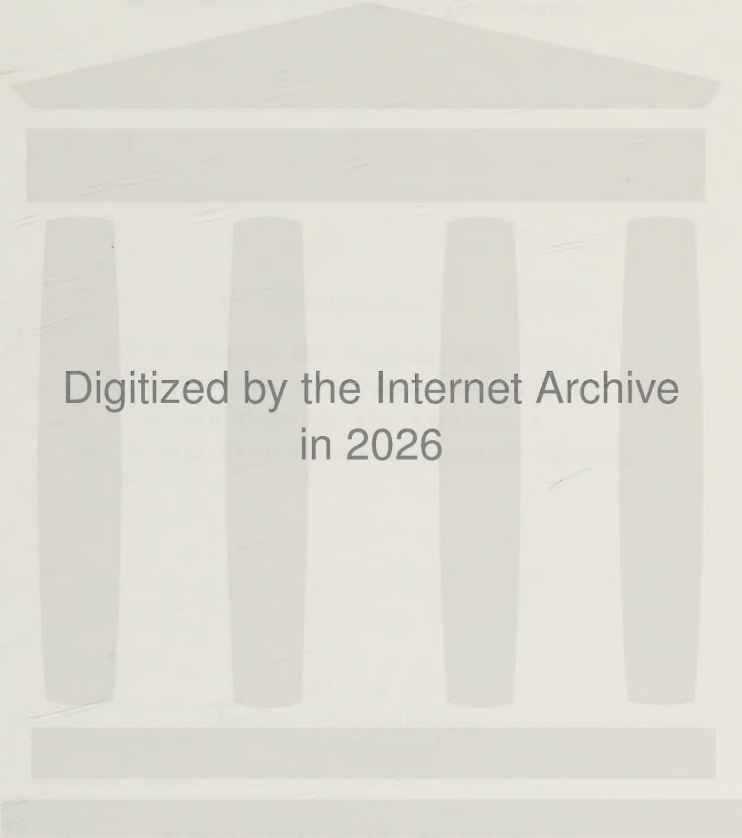


Periodische Lösungen neutraler Differenzen-Differentialgleichungen

Markus Preisenberger

*Liss
Offenbach
1984*



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554007_0094

Periodische Lösungen neutraler
Differenzen-Differentialgleichungen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
an der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Markus Preisenberger
aus München

eingereicht am 30. Juli 1984

1. Berichterstatter: Prof. Dr. H.-O. Walther
 2. Berichterstatter: Prof. Dr. E. Wienholtz
- externer Gutachter : Prof. Dr. G. Uebe

Tag der mündlichen Prüfung: 21.12.1984

Periodische Lösungen neutraler
Differenzen-Differentialgleichungen

Einleitung und Zusammenfassung.....	1
1. Eine nichtlineare neutrale Differenzen-Differentialgleichung.....	8
1.1 Das Konjunkturmodell von Goodwin.....	8
1.2 Definitionen und elementare Eigenschaften der Lösungen der Gleichung	
$\frac{d}{dt}y(t) - f(\frac{d}{dt}y(t-1)) = -a \cdot y(t)$	11
1.3 Ein Existenzsatz für periodische Lösungen der Gleichung	
$\frac{d}{dt}y(t) - f(\frac{d}{dt}y(t-1)) = -a \cdot y(t)$	16
1.4 Über die Verwandtschaft der Gleichungen	
$\dot{y}(t) - f(\dot{y}(t-1)) = -a \cdot y(t)$	
$\frac{d}{dt}[z(t) - f(z(t-1))] = -a \cdot z(t)$	21
2. Periodische Lösungen von Differenzen-Differential- gleichungen und Systeme gewöhnlicher Differential- gleichungen.....	22
2.1 Über die Beziehung zwischen periodischen Lösungen von Differenzen-Differentialgleichungen und Lösungen einer Randwertaufgabe für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen.....	24
2.2 Ein Randwertproblem für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen.....	28
2.3 Ein Verzweigungssatz für periodische Lösungen mit konstanter rationaler Periode der Gleichung	
$\frac{d}{dt}y(t) - a \cdot f(\frac{d}{dt}y(t-1)) = g(by(t))$	35

3. Über neutrale Funktional-Differentialgleichungen.....	44
3.1 Definitionen und grundlegende Sätze für bestimmte Funktional-Differentialgleichungen.....	46
3.2 Die lineare Funktional-Differentialgleichung $\frac{d}{dt}[y(t)-a(y(t-1)+g(t))] = a[by(t)+cy(t-1)+f(t)]$	64
3.3 Invariante Lösungsmannigfaltigkeiten.....	98
3.4 Ein Hopf-Verzweigungssatz für neutrale Funktional-Differentialgleichungen.....	119
4. Anwendung der Ergebnisse aus Kapitel 3 auf die Gleichung $\frac{d}{dt}y(t) - af(\frac{d}{dt}y(t-1)) = by(t)$	125
4.1 Über die charakteristische Funktion $\Delta(a,z) = z - a \cdot z \cdot e^{-z} - c$	127
4.2 Ein Hopf-Verzweigungssatz für periodische Lösungen der Gleichung $\frac{d}{dt}y(t) - af(\frac{d}{dt}y(t-1)) = by(t)$	135
Abkürzungen und Symbole.....	141
Literaturverzeichnis.....	144

Einleitung und Zusammenfassung

In den verschiedensten wissenschaftlichen Disziplinen werden mathematische Modelle zur Beschreibung realer Sachverhalte benutzt.

Eine weitverbreitete Modellform bilden die Differentialgleichungen. Sie finden Anwendung in Naturwissenschaft und Technik, aber auch in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften. Neben den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, die seit langem in der Physik eine große Rolle spielen, haben in den letzten Jahrzehnten auch Differenzen-Differentialgleichungen und Funktional-Differentialgleichungen an Bedeutung gewonnen. Grob gesprochen beschreiben Differenzen-Differentialgleichungen und Funktional-Differentialgleichungen Systeme, deren Entwicklung in einem Zeitpunkt nicht nur von dem Zustand des Systems in diesem Zeitpunkt abhängt, sondern zusätzlich von einer ganzen Menge von Zuständen zu früheren oder späteren Zeitpunkten. Zwei große Klassen von Gleichungen bilden die retardierten und die neutralen Gleichungen. Durch Gleichungen dieser Klassen werden Systeme beschrieben, deren Änderung in einem Zeitpunkt t von dem Zustand in diesem Zeitpunkt und von früheren Zuständen abhängt. Bei retardierten Gleichungen tritt die höchste Ableitung im Zeitpunkt t auf, während bei neutralen Gleichungen die höchste Ableitung auch zu früheren Zeitpunkten auftreten kann.

Ein klassisches Beispiel einer retardierten Gleichung ist die Hutchinson Gleichung.

$$\frac{d}{dt}N(t) = r \cdot (1 - N(t-\tau)/k) \cdot N(t) \quad k, r, \tau > 0 ;$$

N ist dabei die Populationsdichte einer Tierart, k eine obere Schranke und r ein Wachstumsfaktor.

Durch Transformation erhält man die Gleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = m \cdot x(t-1)(1+x(t)) .$$

Diese Gleichung wurde von E.M. Wright in [36] 1955 im Zusammenhang mit der Verteilung von Primzahlen studiert. Bereits 1935 beschäftigten sich Frisch und Holme in [14] mit der Gleichung

$$\frac{d}{dt}x = a \cdot x(t) + b \cdot x(t-1)$$

im Rahmen der Konjunkturtheorie. Diese Reihe von Beispielen ließe sich durch eine Vielzahl fortsetzen (s.a. [16], [17], [23], [01]).

Die vorliegende Arbeit wurde durch eine Differenzen-Differentialgleichung aus der Konjunkturtheorie der Volkswirtschaftslehre motiviert. Diese Gleichung wurde von Goodwin in einer Arbeit 1951 in [15] aufgestellt. Mit diesem Modell versuchte er die Existenz von periodischen Schwankungen im Konjunkturverlauf einer Volkswirtschaft zu erklären. Nach einer Transformation erhält man die Gleichung

$$(E.1) \quad \frac{d}{dt}x(t) - f\left(\frac{d}{dt}x(t-1)\right) = a \cdot x(t) ;$$

die Gleichung gehört zur Klasse der neutralen Differenzen-Differentialgleichungen.

Die zyklischen Schwankungen werden durch periodische Lösungen der Differenzen-Differentialgleichung wiedergegeben. Goodwin zeigte für eine Näherungsgleichung in [15] die Existenz periodischer Lösungen. Ebenso wurden in [33] periodische Lösungen numerisch nachgewiesen.

Ziel der Arbeit ist es, allgemeinere Existenzsätze für periodische Lösungen von Differenzen-Differentialgleichungen zu zeigen, und die Goodwinsche Modellgleichung in diese Gleichungen einzuordnen.

Nach Einführung eines geeigneten Lösungsbegriffes und dem Beweis einiger elementarer Eigenschaften gewisser Lösungen der Gleichung (E.1) zeigen wir in Kapitel 1 einen ersten Existenzsatz für periodische Lösungen.

Im zweiten Kapitel greifen wir die Idee auf, Differenzen-Differentialgleichungen durch Reduktion auf

In Abschnitt 3.1 geben wir einen neuen Existenzbeweis für Lösungen einer Klasse nichtlinearer Funktional-Differentialgleichungen. Weiter untersuchen wir die Eindeutigkeit und das Wachstumsverhalten der Lösungen.

In 3.2 stellen wir die für den weiteren Verlauf der Untersuchung wichtigsten Ergebnisse aus der Theorie der linearen Funktional-Differentialgleichungen zur Verfügung.

Auf den Ergebnissen dieser beiden Abschnitte aufbauend, zeigen wir einen Verzweigungssatz für periodische Lösungen der Gleichung (E.2).

Um eine derartigen Satz zu erreichen, gibt es zwei Möglichkeiten.

Der erste Lösungsweg basiert auf der Fredholm-Alternative und dem Satz über implizite Funktionen.

Beispiele dazu geben Hale in [17] für retardierte Gleichungen und de Oliveira in [09] für neutrale Gleichungen. In [22] findet sich ein drittes Beispiel.

Diesen Weg beschreiten wir nicht.

Der zweite Lösungsweg benutzt invariante Lösungsmannigfaltigkeiten. In [18], [19] und [20] geht Hale diesen Weg, um bestimmte neutrale Funktional-Differentialgleichungen zu untersuchen. (E.2) ordnet sich in die von ihm untersuchten Gleichungen nur dann ein, wenn $g(\phi)$ in einem bestimmten Sinn von $\phi(0)$ unabhängig ist. Diese Einschränkung benötigen wir bei unseren Untersuchungen nicht.

In [18] beweist er die Existenz einer invarianten Lösungsmannigfaltigkeit, um die asymptotische Stabilität der Nulllösung auch in den Fällen zu analysieren, in denen die charakteristische Gleichung der Funktional-Differentialgleichung rein imaginäre Nullstellen besitzt.

In [19] gibt er einen Existenzbeweis für invariante Lösungsmannigfaltigkeiten für eine Klasse von Gleichungen, die (E.2) im Fall $g=0$ enthält. Für $g \neq 0$ behauptet er nur die Existenz einer Lösungsmannigfaltigkeit. Für den Fall $g=0$ skizziert er einen Beweis für einen Verzweigungssatz für

periodische Lösungen. Dabei benutzt er den Satz über implizite Funktionen und das Theorem von Poincaré-Bendixon. In [20] finden sich die gleichen Resultate wie in [19].

Henry beweist in [24] ebenfalls die Existenz invarianter Lösungsmannigfaltigkeiten für eine große Klasse neutraler Funktional-Differentialgleichungen unter der Voraussetzung, daß die charakteristische Funktion nur Nullstellen mit negativem Realteil hat.

In Abschnitt 3.3 stellen wir ausführlich eine neue Variante des Existenzbeweises für invariante Lösungsmannigfaltigkeiten dar. Dieser Beweis liefert Lösungsmannigfaltigkeiten für die Gleichung (E.2) auch ohne die Einschränkung an g , die Hale verlangt, und ebenso im Fall $g \neq 0$. Außerdem verwenden wir schwächere Voraussetzungen über die Nullstellen der charakteristischen Funktion als Hale und Henry.

Darüber hinaus studieren wir die Abhängigkeit der Lösungsmannigfaltigkeiten vom Verzweigungsparameter in einer in diesem Zusammenhang neuen Art und Weise.

In Abschnitt 3.4 zeigen wir in einem detaillierten Beweis einen Hopf-Verzweigungssatz für Gleichung (E.2). Dieser Satz schließt den Fall $g \neq 0$ im Gegensatz zum Ergebnis von Hale in [19] ein. Auch im Beweis gehen wir anders vor als Hale. Das entscheidende Hilfsmittel in unserem Satz ist der Brouwersche Abbildungsgrad und nicht der Satz über implizite Funktionen und das Theorem von Poincaré-Bendixon.

In Kapitel 4 diskutieren wir die charakteristische Gleichung

$$z(1 - ae^{-z}) - c = 0$$

und beweisen nach Einführung eines geeigneten Verzweigungsparameters mit den Ergebnissen aus Kapitel 3 einen Verzweigungssatz für periodische Lösungen der Gleichung (E.1).

Die Verzweigungssätze aus Kapitel 2 und 4 ergeben zwar beide eine Aussage für Gleichung (E.1), sie sind aber wesentlich voneinander verschieden.

Der Verzweigungssatz aus Kapitel 2 liefert periodische Lösungen, deren rationale Periode bei Variation von zwei Verzweigungsparametern konstant bleibt. Dieser Verzweigungssatz ist auch für Gleichungen anwendbar, die nicht notwendigerweise eine lineare rechte Seite haben, wie das bei Gleichung (E.1) der Fall ist.

Der Verzweigungssatz in Kapitel 4 baut auf die Ergebnisse von Kapitel 3 auf. Wegen der linearen rechten Seite von (E.1) können wir statt (E.1) eine Ersatzgleichung betrachten, auf die wir den Verzweigungssatz aus 3.4 anwenden. Außerdem erhalten wir mit diesem Verzweigungssatz auch periodische Lösungen mit nichtrationaler Periode bei Variation nur eines Verzweigungsparameters.

Die beiden Sätze für (E.1) gewinnen wir also aus verschiedenen Verzweigungssätzen, die für unterschiedliche Klassen von Gleichungen gelten.

Die in Kapitel 2 und 3 dargestellten Ergebnisse liefern verschiedene Ansatzpunkte für Verallgemeinerungen.

Der in Kapitel 2 benutzte Ansatz zum Nachweis periodischer Lösungen mit ganzer oder rationaler Periode kann durch die Verwendung von Gleichungssystemen mit unendlich vielen Gleichungen ausgedehnt werden, um auch Lösungen mit nichtrationaler Periode nachzuweisen.

Die Resultate aus Kapitel 3 bieten unter anderem folgende zwei Ansatzpunkte für weiter Untersuchungen.

Zum einen kann man versuchen den Verzweigungssatz und den Existenzsatz für invariante Lösungsmannigfaltigkeiten für allgemeinere Funktional-Differentialgleichungen zu zeigen, indem man weiterreichende Mittel zur Untersuchung der linearen Funktional-Differentialgleichungen heranzieht.

Zum anderen kann man die Voraussetzungen an die Nullstellen der charakteristischen Gleichung bzgl. der Ordnung und der Realteile der Nullstellen abschwächen.

In Kapitel 4 wird für eine bestimmte Gleichung die Existenz eines Verzweigungspunktes für periodische Lösungen gezeigt. Hier stellt sich die Frage, ob es für diese Gleichung weitere derartige Punkte gibt.

Darüber hinaus erhebt sich im Zusammenhang mit den nachgewiesenen periodischen Lösungen die Frage, ob diese Lösungen stabil oder instabil sind.

Die vorliegende Arbeit liefert also auch einen Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen.

Schließlich möchte ich all denjenigen danken, die die Rahmenbedingungen geschaffen haben, welche für das Entstehen dieser Arbeit unabdingbar waren.

Besonders danke ich Herrn Prof. Dr. G. Uebe, der mich auf das Goodwinsche Modell aufmerksam machte. Er ermutigte mich während meiner Tätigkeit in Hamburg zu dieser Arbeit und unterstützte mich mit wertvollen Anregungen. Durch seine Hilfe war es mir auch möglich, den zweiten Abschnitt der Arbeit in München durchzuführen.

Mein besonderer Dank gilt ebenso Herrn Prof. Dr. H.-O. Walther für die freundliche Aufnahme an der Universität in München und für sein stetiges Interesse an der Entwicklung der Arbeit. Viele anregende Diskussionen mit ihm trugen wesentlich zum Fortgang der Untersuchungen bei. Ihm verdanke ich auch den Hinweis auf die Theorie der Lösungsmannigfaltigkeiten und des Abbildungsgrades zur Untersuchung der Existenz periodischer Lösungen von Differentialgleichungen.

Die Rechen- und Schreibarbeiten zu dieser Arbeit wurden am Rechenzentrum der Hochschule der Bundeswehr in Hamburg und am Leibniz-Rechenzentrum in München durchgeführt.

Die Literaturrecherchen wurden durch das Bibliographiesystem [37] von Herrn Prof. Dr. G. Uebe unterstützt.

1. Eine nichtlineare neutrale Differenzen-Differentialgleichung

In diesem Kapitel zeigen wir anhand eines Beispiels, wie nichtlineare Differenzen-Differentialgleichungen auftreten können. Im Zusammenhang mit diesem Beispiel werden wir einige Begriffe und Definitionen einführen und elementare Aussagen beweisen. In 1.3 liefern wir einen ersten Existenzsatz für periodische Lösungen, und in 1.4 werden wir zu einer weiteren Klasse von Differentialgleichungen geführt.

1.1 Das Konjunkturmodell von Goodwin

In der Volkswirtschaftslehre beschreibt man unter anderem Wirtschaftssysteme mit mathematischen Modellen. Goodwin versucht in [15] das Phänomen der regelmäßigen Schwankungen im Konjunkturverlauf einer Volkswirtschaft als eine Eigenschaft zu erklären, die sich aus den inneren Zusammenhängen einer Volkswirtschaft, den Beziehungen der sie beschreibenden Größen ergibt. In sein Modell gehen die folgenden Faktoren ein.

C der Konsum ; I die induzierte Investition ;
Y das Volkseinkommen ; A die autonome Investition .

Die Größen werden als von der Zeit t stetig abhängige Funktionen aufgefaßt und durch vier Gleichungen miteinander verknüpft.

$$(1.1) \quad Z = C + I + A ; (1.2) \quad C = C(Y) ; \\ (1.3) \quad I = I(\dot{Y}) ; (1.4) \quad \dot{Y} = -\alpha \cdot (Y - Z) .$$

In (1.1) wird die Gesamtnachfrage Z in den Konsum C , die induzierten Investitionen I und die autonomen Investitionen A zerlegt. (1.2) macht den Konsum vom Volkseinkommen abhängig. Goodwin benutzt dafür den elementaren Zusammenhang

$$(1.5) \quad C = c \cdot Y, \quad c \in (0,1) \cap \mathbb{Q} ;$$

c heißt marginale Konsumquote.

Gleichung (1.4) stellt die Angebotsseite dar. Die Änderung des Volkseinkommens (Ableitung nach der Zeit) wird proportional zur Differenz aus Volkseinkommen und Gesamtnachfrage angenommen, mit $\alpha > 0$.

(1.3) verknüpft die Änderung des Einkommens mit der induzierten Investition. I ist dabei eine stetige, beschränkte und monoton wachsende Funktion von $\dot{Y}$ nach $\dot{Y}$ mit der Eigenschaft $I(x) \cdot x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Durch die Beschränktheit von I wird die begrenzte Kapazität der Investitionsgüterindustrie und die fehlende Möglichkeit, Investitionsgüter beliebig rasch abbauen zu können, ausgedrückt. Goodwin führt in (1.3) auch noch eine Verzögerung $\tau > 0$ ein, so daß $I = I(\dot{Y}(t-\tau))$ gilt.

τ stellt die mittlere Zeit dar, die zwischen Investitionsentscheidung und Investition liegt. Kombinieren wir die Gleichungen, so erhalten wir

$$(1.6) \quad \dot{Y}(t) = -\alpha(1-c) \cdot Y(t) + \alpha(I(\dot{Y}(t-\tau)) + A(t)) .$$

Diese Gleichung nähert Goodwin durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung an. Für $A(t)=0$ erhält er in [15] mit einer graphischen Methode die Existenz einer periodischen Lösung der genäherten Gleichung. In [03] wird durch eine Näherungsmethode (method of equivalent linearization) ein derartiger Nachweis geführt. In [33] wird mit Hilfe eines Analogrechners eine numerische Analyse durchgeführt, in der ebenso die Existenz periodischer Lösungen sichtbar wird. [13] und [31] diskutieren gleichfalls die Existenz periodischer Lösungen in der Differentialgleichung 2. Ordnung. Weitere Darstellungen und Diskussionen des Goodwinschen Modells, insbesondere mehr über seine wirtschaftswissenschaftliche Interpretation, finden sich in [01] und [35].

Alle diese Untersuchungen des Goodwinschen Modells greifen auf eine Näherungsmethode oder auf ein numerisches Verfahren zurück. Im folgenden dieser Arbeit werden verschiedene

Existenzbeweise für periodische Lösungen in der exakten Gleichung gegeben. Bevor wir mit der Diskussion in 1.2 beginnen, führen wir in (1.6) noch eine Transformation durch. Wir setzen

$y(t) := \tau^{-1} \cdot Y(t \cdot \tau)$ und erhalten damit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= \tau^{-1} \cdot \frac{d}{dt}Y(t \cdot \tau) = \dot{Y}(t \cdot \tau) = \\ &= -\alpha \cdot [(1-c) \cdot Y(t \cdot \tau) - I(\dot{Y}(t \cdot \tau - \tau)) - A(t \cdot \tau)] \\ &= -\alpha \cdot [(1-c) \cdot \tau \cdot y(t) - I(\frac{d}{dt}y(t-1)) - A(t \cdot \tau)] ; \end{aligned}$$

für $A(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ führt uns diese Transformation auf die Klasse von Differenzen-Differentialgleichungen

$$(1.7) \quad \frac{d}{dt}y(t) - f(\frac{d}{dt}y(t-1)) = -a \cdot y(t) ;$$

(1.7) wird zunächst Gegenstand unserer weiteren Untersuchungen sein.

1.2 Definitionen und elementare Eigenschaften der Lösungen der Gleichung

$$\frac{d}{dt}y(t) - f\left(\frac{d}{dt}y(t-1)\right) = -a \cdot y(t)$$

Bevor wir mit der Untersuchung von (1.7) beginnen können, muß zunächst die Frage geklärt werden, was wir unter einer Lösung von (1.7) beziehungsweise einer Lösung eines Anfangswertproblems der Gleichung (1.7) verstehen wollen.

Wir erwarten von einer Funktion y , die Lösung von (1.7) sein soll, daß y in den Punkten, in denen die Ableitung $\dot{y}$ existiert, (1.7) erfüllt. Außerdem soll eine Lösung durch einen gegebenen Anfangswert eindeutig bestimmt sein. Wählen wir als Anfangswerte Punkte $y_0 \in \mathbb{K}$, genügt dies nicht, eine Lösung eindeutig festzulegen. Wählen wir als Anfangswert eine stetig differenzierbare Funktion $\phi: [-1+t_0, t_0] \rightarrow \mathbb{K}$, wie dies auch in [02] getan wird, so ist eine stetige Lösungsfunktion eindeutig durch ϕ bestimmt. Gilt nämlich $y(t) = \phi(t)$ für $t \in [-1+t_0, t_0]$, folgt für $t \in (t_0, 1+t_0)$ die Gleichung

$$\dot{y}(t) = -a \cdot y(t) + f(\dot{\phi}(t-1)) .$$

Diese Gleichung besitzt zum Anfangswert $y(t_0) = \phi(t_0)$ eine eindeutig bestimmte stetige Lösung für $t \in [t_0, t_0+1)$. Mit der Stetigkeit der Lösung y und Induktion erhält man die Eindeutigkeit von y .

Eine entsprechende Überlegung liefert auch dann noch die Eindeutigkeit von y , wenn wir von ϕ nur die stetige Differenzierbarkeit in $(-1+t_0, t_0)$ mit Ausnahme endlich vieler Punkte und die Existenz der Grenzwerte $\phi(t^+)$ und $\phi(t^-)$ für alle $t \in [-1+t_0, t_0]$ verlangen. Im weiteren bezeichnen wir mit C die Menge aller stetigen Funktionen, die das Intervall $[-1, 0] \subset \mathbb{K}$ in einen Körper $\mathbb{K}$ abbilden. Weiter sei

$$C_s := \{ \phi \in C \mid \phi \text{ ist stetig differenzierbar in } [-1, 0] \text{ mit Ausnahme endlich vieler Punkte; es existieren } \phi(t^+) \text{ und } \phi(t^-) \text{ für alle } t \in [-1, 0] \} .$$

1.2.1 Definition

a) Eine Funktion $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto y(t)$ heißt eine Lösung der Gleichung (1.7), wenn gilt:

- (1) y ist stetig in $\mathbb{R}$;
- (2) es gibt endlich viele Punkte $t_k \in [-1, 0]$, $k=0, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$ mit $-1 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_m = 0$, so daß y in den offenen Intervallen $(t_k + n, t_{k+1} + n)$, $k = 0, \dots, m-1$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ stetig differenzierbar ist; in diesen Intervallen erfüllt y die Gleichung (1.7);
- (3) für alle $t \in \mathbb{R}$ existieren $\dot{y}(t^+)$ und $\dot{y}(t^-)$.

b) Eine Funktion $y: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto y(t)$ heißt eine Lösung des Anfangswertproblems der Gleichung (1.7) zum Anfangswert $\phi \in C$, wenn gilt:

- (1) y ist stetig in $[-1, +\infty)$;
- (2) es gibt endlich viele Punkte $t_k \in [-1, 0]$, $k=0, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$ mit $-1 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_m = 0$, so daß y in den offenen Intervallen $(t_k + n, t_{k+1} + n)$, $k = 0, \dots, m-1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig differenzierbar ist; in diesen Intervallen erfüllt y die Gleichung (1.7);
- (3) für alle $t \in [-1, +\infty)$ existieren $\dot{y}(t^+)$ und $\dot{y}(t^-)$;
- (4) $y(t) = \phi(t)$ für alle $t \in [-1, 0]$.

□

Mit diesem Lösungsbegriff können wir nun einige einfache Sätze über das Anfangswertproblem von (1.7) zeigen.

1.2.2 Satz

Gegeben seien eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ein $\phi \in C$ mit $\phi \in C$.

Dann besitzt das Anfangswertproblem von (1.7) zum Anfangswert ϕ eine eindeutig bestimmte Lösung.

Beweis:

Wir setzen:

$$y(t) := \begin{cases} \phi(t), & \text{für } t \in [-1, 0] \\ e^{-a(t-n)} \left(y(n) + \int_n^t e^{a(s-n)} \cdot f(\dot{y}(s-1)) ds \right), & \\ & \text{für } t \in (n, n+1], n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Damit ist die Existenz einer Lösung bewiesen.

Wir zeigen:

Ist $\tilde{y}: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \tilde{y}(t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems der Gleichung (1.7) zum Anfangswert $\phi \in C$, dann gilt $\tilde{y}(t) = y(t)$ für alle $t \in [-1, +\infty)$.

Beweis:

Mit Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$ zeigen wir, daß $\tilde{y}(t) = y(t)$ für alle $t \in [-1+n, n]$ gilt.

Induktionsanfang $n=0$: Hier ist nichts zu zeigen.

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$:

$\tilde{y}$ und y seien Lösungen des Anfangswertproblems der Gleichung (1.7) zum Anfangswert $\phi \in C$, und es gelte die Induktionsvoraussetzung $\tilde{y}(t) = y(t)$ für $t \in [-1+n, n]$.

Dann gilt bis auf endlich viele Ausnahmepunkte in $[-1+(n+1), n+1]$ für alle $t \in [-1+(n+1), n+1]$:

$$\frac{d}{dt} \tilde{y}(t) - \frac{d}{dt} y(t) = -a[\tilde{y}(t) - y(t)].$$

Da $\tilde{y}$ und y stetig sind, gilt damit für alle $t \in (-1+(n+1), n+1)$

$$\frac{d}{dt} [\tilde{y}(t) - y(t)] = -a[\tilde{y}(t) - y(t)].$$

Integration dieser Gleichung und die Stetigkeit von $\tilde{y}$ und y liefern

$$\tilde{y}(t) - y(t) = [\tilde{y}(n) - y(n)] \cdot e^{-a(t-n)} \text{ für alle } t \in [n, n+1].$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\tilde{y}(n) = y(n)$; damit folgt der Induktionsschritt.

◇

1.2.3 Satz

Gegeben sei ein $a \in \mathbb{R}^+$, eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und ein $\phi \in C$ mit $\phi \in C$. Weiter gebe es ein $m \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(x)| \leq m$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

Es gibt eine von ϕ unabhängige Konstante $k \in \mathbb{R}^+$ und ein $t_0 = t_0(\phi) \in \mathbb{R}^+$, so daß für die Lösung $y: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto y(t)$ zum Anfangswert $\phi \in C$ der Gleichung (1.7) für $t \geq t_0$ gilt:

$$|y(t)| \leq k \text{ und } |\dot{y}(t)| \leq k.$$

Beweis:

Benutzen wir die Darstellung der Lösung aus dem Beweis von Satz 1.2.2, dann folgt mit Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$ für $t \in [n, n+1]$:

$$y(t) = e^{-at} \left(\phi(0) + \int_0^t e^{as} f(\dot{y}(s-1)) ds \right), \quad t \in \mathbb{R}^+;$$

damit erhalten wir für $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq e^{-at} |\phi(0)| + \int_0^t e^{a(s-t)} m ds = \\ &= e^{-at} |\phi(0)| + (m/a)(1 - e^{-at}); \end{aligned}$$

wir wählen nun ein $t_0 \in \mathbb{R}^+$ mit $e^{a \cdot t_0} \cdot (m/a) \geq |\phi(0)|$ und erhalten damit $|y(t)| \leq 2(m/a)$ für alle $t \geq t_0$.

Um die Abschätzung für $\dot{y}$ zu erhalten, bedenken wir, daß y eine Lösung von (1.7) ist. Es gilt also

$$\dot{y}(t) = -ay(t) + f(\dot{y}(t-1)), \quad t \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N};$$

damit wird

$$|\dot{y}(t)| \leq 3m \text{ für alle } t \geq t_0.$$

Setzen wir $k = \max\{2m/a, 3m\}$, ist der Satz bewiesen.

◇

Satz 1.2.2 liefert eine wichtige Beobachtung. Setzen wir die Lösung so, wie sie in Satz 1.2.2 definiert ist, in (1.7) für $n=0$ ein, dann erhalten wir

$$\dot{y}(t) = -a(e^{-at}y(0) + \int_0^t e^{a(s-t)}f(\dot{y}(s-1))ds) + f(\dot{y}(t-1))$$

Ist $\dot{y}$ 1-periodisch, so ist dies eine Fixpunktgleichung für $\dot{y}$ in Abhängigkeit von $y(0)$. Indem wir $y(0)$ geeignet durch $\dot{y}$ ausdrücken, werden wir in 1.3 zu einer weiteren Fixpunktgleichung kommen, die uns einen Existenzbeweis für periodische Lösungen von (1.7) erlaubt.

1.3 Ein Existenzsatz für periodische Lösungen der Gleichung

$$\frac{d}{dt}y(t) - f\left(\frac{d}{dt}y(t-1)\right) = -a \cdot y(t)$$

In diesem Abschnitt wollen wir einen ersten elementaren Existenzbeweis für gewisse periodische Lösungen der Differenzen-Differentialgleichung

$$(1.7) \quad \frac{d}{dt}y(t) - f\left(\frac{d}{dt}y(t-1)\right) = -a \cdot y(t)$$

geben.

1.3.1 Satz

Gegeben sei ein $a \in \mathbb{R}^+$ und eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Für f gelte:

- a) $f(x) = -f(-x)$, für alle $x \in \mathbb{R}$;
- b) es gibt ein $M \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}^+$ und ein $d \in \mathbb{R}^+$ mit $f(x_0) = x_0 + 2 \cdot d =: m$;
- c) $f(x) \geq f(y)$ und $|f(x) - f(y)| \leq q \cdot |x - y|$
für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x \geq y \geq x_0$ mit $q \in (0, 1)$.

Dann besitzt die Gleichung (1.7) eine nichtkonstante 1-periodische Lösung.

Beweis:

Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $\tau \in \mathbb{R}$ mit $2 \cdot \tau = \frac{1}{n}$, so daß gilt:

$$| [m \cdot e^{-a \cdot \tau} / (1 + e^{-a \cdot \tau}) - M] \cdot (1 - e^{-a \cdot \tau}) | \leq d \text{ und}$$

$$q_1 := q \cdot [(1 - e^{-a \cdot \tau}) / (1 + e^{-a \cdot \tau}) + 1 - e^{-a \cdot \tau} + 1] < 1 \text{ gilt ;}$$

$C([0, \tau], \mathbb{R})$ bezeichne den Raum der stetigen Funktionen, die das Intervall $[0, \tau] \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ abbilden. $|\cdot|$ sei die Supremumsnorm, d.h. für $y \in C([0, \tau], \mathbb{R})$ ist

$$|y| := \sup\{|y(t)| \mid t \in [0, \tau]\}.$$

Für $y \in C([0, \tau], \mathbb{R})$ sei $\min(y) := \min\{y(t) \mid t \in [0, \tau]\}$. Nun betrachten wir die Menge

$$S := \{y \in C([0, \tau], \mathbb{R}) \mid \min(y) \geq x_0\}$$

und folgenden Operator:

$$T: S \rightarrow C([0, \tau], \mathbb{R}), \quad y \mapsto Ty$$

$$Ty(t) := -a \cdot e^{-a \cdot t} \left[y_0 + \int_0^t e^{a \cdot s} \cdot f(y(s)) ds \right] + f(y(t)), \quad t \in [0, \tau],$$

$$y_0 := -e^{-a \cdot \tau} / (1 + e^{-a \cdot \tau}) \cdot \int_0^\tau e^{a \cdot s} f(y(s)) ds.$$

Wir zeigen:

1.3.2 Lemma

Für den Operator T gilt:

$TS \subset S$ und $|Ty - Tz| \leq q_1 \cdot |y - z|$ für alle $y, z \in S$.

Beweis:

Für $y \in S$ folgt $f(y(t)) \geq f(x_0)$, $t \in [0, \tau]$ und $y_0 < 0$. Damit erhalten wir

$$(m/a)(e^{a \cdot t} - 1) \leq \int_0^t e^{a \cdot s} \cdot f(y(s)) ds \leq (M/a)(e^{a \cdot t} - 1) \text{ und}$$

$$0 < m \leq -y_0 \cdot a \cdot (1 + e^{a \cdot \tau}) / (e^{a \cdot \tau} - 1) \leq M.$$

Nach Wahl von τ und Definition von m ergibt sich für $t \in [0, \tau]$

$$Ty(t) \geq m[(e^{a \cdot \tau} - 1)/(e^{a \cdot \tau} + 1)]e^{-a \cdot t} - (M/a)(e^{a \cdot t} - 1)e^{-a \cdot t} + m \geq$$

$$\geq m[(e^{a \cdot \tau} - 1)/(e^{a \cdot \tau} + 1)]e^{-a \cdot \tau} - M(1 - e^{-a \cdot \tau}) + m =$$

$$= [me^{-a \cdot \tau} / (1 + e^{-a \cdot \tau}) - M](1 - e^{-a \cdot \tau}) + m \geq$$

$$\geq m - d = x_0 + d;$$

damit ist

$$Ty(t) \geq m - d = x_0 + d \text{ für } t \in [0, \tau], \text{ also } Ty \in S.$$

Sind $y, z \in S$ und $t \in [0, T]$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} |T y(t) - T z(t)| &\leq \\ &\leq a e^{-at} \{ [e^{-aT} / (1 + e^{-aT})] \int_0^T e^{as} q |y(s) - z(s)| ds + \\ &\quad + \int_0^t e^{as} q |y(s) - z(s)| ds \} + q |z(t) - y(t)| \leq \\ &\leq \{ e^{-at} [(e^{-aT} / (1 + e^{-aT})) \cdot (e^{aT} - 1) + e^{at} - 1] + 1 \} \cdot q \cdot |y - z| \leq \\ &\leq [(1 - e^{-aT}) / (1 + e^{-aT}) + 1 - e^{-aT} + 1] \cdot q \cdot |y - z| = \\ &= q_1 |y - z| ; \end{aligned}$$

das zeigt schließlich

$$|T y - T z| \leq q_1 \cdot |y - z| ,$$

und das Lemma ist bewiesen.

Beweis des Satzes 1.3.1

T besitzt nach dem Fixpunktsatz von Banach einen Fixpunkt $v \in S$. Aufgrund der Wahl von S ist v eine von 0 verschiedene Funktion.

Wir definieren folgende Funktion $z: [0, 2T] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto z(t)$,

$$\begin{aligned} z(t) &:= -\frac{1}{a} \{ T(v(t)) - f(v(t)) \} \text{ für } t \in [0, T] \text{ und} \\ z(t) &:= -z(t-T) \text{ für } t \in [T, 2T]. \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung zeigt:

$$\lim_{t \rightarrow T^-} z(t) = \lim_{t \rightarrow T^+} z(t) , \quad z(0) = z(2T) ;$$

z ist also eine stetige Funktion von $[0, 2T]$ nach $\mathbb{R}$. Außerdem ist z stetig differenzierbar in $[0, 2T]$ mit Ausnahme der Punkte $0, T, 2T$.

$$\text{Weiter ist } z(0) = v_0 , \quad z(2T) = -z(\dot{T}) = v_0 .$$

Durch $2T$ -periodische Fortsetzung erhalten wir eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion, die überall stetig differenzierbar ist mit Ausnahme der Punkte nT , $n \in \mathbb{Z}$. Nach Definition von T ist z sogar 1-periodisch. Wir zeigen noch, daß z in den Punkten stetiger Differenzierbarkeit (1.7) erfüllt.

Wir erhalten für $t \in (0, \tau)$

$$\frac{d}{dt}z(t) = -a \cdot z(t) + f(v(t)) = Tv(t) = v(t)$$

Da v von 0 verschieden ist, wird z eine nichtkonstante Funktion.

Mit der Periodizität von z folgt

$$\frac{d}{dt}z(t) = -a \cdot z(t) + f\left(\frac{d}{dt}z(t-1)\right).$$

Für $t \in (\tau, 2\tau)$ erhält man die Behauptung wegen $f(-x) = -f(x)$, und der Satz ist bewiesen.

◇

1.3.3 Bemerkung

Satz 1.3.1 ist zwar ein Existenzsatz für periodische Lösungen der Gleichung (1.7), dennoch ist er in vier Punkten unbefriedigend.

(1) Die periodischen Lösungen sind stetig aber nicht stetig differenzierbar im Intervall $(0,1)$. Die Frage bleibt offen, ob es periodische Lösungen gibt, die stärkere Differenzierbarkeitseigenschaften besitzen.

(2) In den Voraussetzungen von 1.3.1 wird von der Funktion f eine starke Symmetrieeigenschaft verlangt.

(3) Wir können im Beweis des Satzes 1.3.1 $n \in \mathbb{N}$ und $\tau \in \mathbb{R}^+$ beliebig groß bzw. klein wählen. Das bedeutet aber, daß wir mit dem Lösungsbegriff aus 1.2.1 unendlich viele, beliebig rasch oszillierende Lösungen mit Periode kleiner 1 erhalten können.

(4) Bei numerischen Untersuchungen in [33] und bei der Analyse von Näherungsgleichungen, wie etwa in [15], wurden Lösungen mit einer Periode nachgewiesen, die größer als die Verzögerung war.

Dies begründet die Vermutung, daß auch für die Gleichung (1.7) die Existenz periodischer Lösungen mit einer Periode größer als 1 nachgewiesen werden kann.

□

In Kapitel 2 und Kapitel 3 werden wir zu Ergebnissen kommen, die nicht die Symmetrievoraussetzungen benötigen und periodische Lösungen mit Periode größer 1 liefern. Die Resultate aus Kapitel 2 und Kapitel 3 werden sogar einen Existenzbeweis für stetig differenzierbare Lösungen ermöglichen.

1.4 Über die Verwandtschaft der Gleichungen

$$\dot{y}(t) - f(\dot{y}(t-1)) = -a \cdot y(t)$$

$$\frac{d}{dt}[z(t) - f(z(t-1))] = -a \cdot z(t)$$

In 1.4 wollen wir eine wichtige Beziehung zwischen den Lösungen von (1.7) und von

$$(1.8) \quad \frac{d}{dt}[z(t) - f(z(t-1))] = -a \cdot z(t)$$

festhalten.

1.4.1 Satz

Ist $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto z(t)$ eine stetige Funktion, so daß die Funktion $Dz: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto Dz(t) := z(t) - f(z(t-1))$ stetig differenzierbar ist in $\mathbb{R}$, und erfüllt $z(t)$ die Gleichung (1.8) für alle $t \in \mathbb{R}$, dann ist die Funktion

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto y(t) := -\frac{1}{a}(z(0) - f(z(-1))) + \int_0^t z(s) ds$$

eine stetig differenzierbare Lösung von (1.7).

Ist z periodisch, dann ist auch y periodisch.

Beweis:

Die Gleichung (1.8) für z ergibt nach Integration

$$z(t) - f(z(t-1)) = -a \cdot y(t).$$

Ist z periodisch, dann ist auch Dz periodisch und damit y .

Wegen $\dot{y}(t) = z(t)$ ist y auch Lösung von (1.7).

◇

Dieser Satz erlaubt es uns, die Theorie über Funktional-Differentialgleichungen, wie sie etwa in [17] entwickelt wird, zur Analyse von (1.8) und damit indirekt von (1.7) anzuwenden. Kapitel 3 macht davon ausführlich Gebrauch.

2. Periodische Lösungen von Differenzen- Differentialgleichungen und Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

In Kapitel 2 untersuchen wir die Existenz periodischer Lösungen von Differenzen-Differentialgleichungen mit Hilfe von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen.

In [26] haben Kaplan und Yorke bereits eine Möglichkeit aufgezeigt, wie man mit gewöhnlichen Differentialgleichungen auf die globale Existenz periodischer Lösungen in Differenzen-Differentialgleichungen schließen kann. In ihrer Arbeit studieren sie Gleichungen der Art

$$\frac{d}{dt}x(t) = -[f(x(t-1)) + f(x(t-2))] , \quad \frac{d}{dt}x(t) = -f(x(t-1)) ;$$

dabei verlangen sie unter anderem, daß f eine ungerade stetige Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist. Es gelingt ihnen ein Existenzbeweis für periodische Lösungen mit einer Periode $n\pi$. Für allgemeinere Gleichungen geben sie zwar eine Beweisidee, jedoch scheitern sie bei deren Durchführung.

Nussbaum untersucht dieselben Gleichungen wie Kaplan und Yorke mit Hilfe geeigneter Fixpunktsätze. In [27], [28] und [29] gelingt es ihm, mit einer von ihm entwickelten Methode die Ergebnisse aus [26] zu bestätigen und auf eine größere Klasse retardierter Gleichungen auszudehnen. In [28] beweist er auch einen Existenzsatz für periodische Lösungen gewisser neutraler Funktional-Differentialgleichungen, der aber für unsere Gleichungen nicht anwendbar ist.

In Abschnitt 2.1 werden wir die Idee der Benutzung gewöhnlicher Differentialgleichungen zum Studium von Differenzen-Differentialgleichungen aufgreifen und durch die Kombination mit Ansätzen, wie sie aus der Hopf-Verzweigungstheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen [06] bekannt sind, zu einem Existenzbeweis für periodische Lösungen kommen. Dabei werden durch unseren Lösungsansatz nicht nur Ergebnisse für die obigen Gleichungen möglich sein, sondern auch für Gleichungen allgemeineren Typs. Auch Gleichungen in

denen die Ableitung mit einer Verzögerung auftritt, können damit behandelt werden. Ein Beispiel werden wir in Abschnitt 2.3 diskutieren.

Die wesentliche Beobachtung über den Zusammenhang von Differenzen-Differentialgleichungen und Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen werden wir in Abschnitt 2.1 darstellen. Das sich daraus ergebende Randwertproblem für gewöhnliche Differentialgleichungen lösen wir in Abschnitt 2.2 .

2.1 Über die Beziehung zwischen periodischen Lösungen von Differenzen-Differentialgleichungen und Lösungen einer Randwertaufgabe für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen

In Abschnitt 2.1 wollen wir einige Vorüberlegungen anstellen, die uns auf einen Zusammenhang zwischen dem Existenzproblem periodischer Lösungen von Differenzen-Differentialgleichungen und dem Existenzproblem von Lösungen eines gewissen Randwertproblems für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen führen.

Um nicht zu sehr mit technischen Einzelfragen belastet zu werden, beschränken wir unsere Ausführungen zunächst auf die Betrachtung einer einfachen nichtlinearen retardierten Differenzen-Differentialgleichung. Wir werden sehen, daß die dargestellte Vorgehensweise sich leicht verallgemeinern läßt. Dies zeigen wir am Beispiel einer nichtlinearen retardierten Differenzen-Differentialgleichung mit mehreren Verzögerungen.

Die in diesem Abschnitt angesprochenen beiden Beispiele, die hauptsächlich zur Erläuterung und Begründung der späteren Vorgehensweise dienen, werden in den Abschnitten 2.2 und 2.3 nicht weiter verfolgt. Dort benutzen wir vielmehr den in Abschnitt 2.1 motivierten Ansatz, um einen Verzweigungssatz für periodische Lösungen einer nichtlinearen neutralen Differenzen-Differentialgleichung zu zeigen.

Gegeben sei eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$.

Wir nehmen an, daß es eine stetige Funktion $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die die Gleichung

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt}y(t) = f(y(t-1))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt und periodisch mit Periode $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ist.

Für $k \in \mathbb{Z}$ können wir Funktionen $y_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto y_k(t) := y(t-k)$ definieren. Diese Funktionen haben die Eigenschaft

$$\begin{aligned} y_k(t) &= y_j(t) \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\} \text{ und } k \equiv j + n \cdot \mathbb{Z}, \\ y_k(t) &= y_{k-1}(t-1), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Für die Ableitung der y_k erhalten wir für $k=0, \dots, n$ unter Berücksichtigung der obigen Eigenschaft

$$\frac{d}{dt} y_k(t) = \frac{d}{dt} y(t-k) = f(y(t-k-1)) = f(y_{k+1}(t)), \quad t \in \mathbb{R};$$

außerdem gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ $y_0(t) = y_n(t)$.

Führen wir die Abbildungen $B, F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein durch

$$\begin{aligned} B: (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)' &\mapsto (y_2, \dots, y_n, y_1)', \\ F: (y_1, \dots, y_n)' &\mapsto (f(y_1), \dots, f(y_n))', \end{aligned}$$

so erhalten wir mit der Abkürzung $x(t) := (y_1(t), \dots, y_n(t))'$ das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$(2.2) \quad \frac{d}{dt} x(t) = F(B(x(t))) ;$$

x erfüllt die Randbedingung

$$(2.3) \quad B(x(1)) = x(0) .$$

Wir sehen damit, daß jede n -periodische Lösung von (2.1) eine Lösung von (2.2) liefert, die (2.3) erfüllt.

Als nächstes zeigen wir, daß auch die Umkehrung unter der Voraussetzung gilt, daß die Lösungen von (2.2) eindeutig durch ihren Anfangswert bestimmt sind.

Ist x eine Lösung von (2.2), die die geforderte Randbedingung (2.3) erfüllt, betrachten wir die Funktion

$$z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto B(x(t+1)) .$$

Es gilt $z(0) = B(x(1)) = x(0)$. Da B und F miteinander vertauschen, ist z eine Lösung der Differentialgleichung (2.2). Sind die Lösungen von (2.2) eindeutig durch ihren Anfangswert bestimmt, folgt $x(t) = z(t) = B(x(t+1))$. Also gilt $\frac{d}{dt} x(t) = F(x(t-1))$, und jede Komponente von x ist eine

Lösung von (2.1). Mit $x(t-1) = Bx(t)$ und $B^n x = x$ folgt $x(t-n) = x(t)$, also die Periodizität von x mit Periode n .

Damit ist es nur erforderlich, Lösungen von (2.2) mit der entsprechenden Randbedingung (2.3) zu finden, um n -periodische Lösungen von (2.1) zu erhalten. Eine Verallgemeinerung dieser Überlegungen auf Gleichungen, in denen auch die Ableitung mit Verzögerung auftritt, also auf neutrale Gleichungen, oder auf Gleichungen mit mehreren ganzzahligen Verzögerungen oder auf derartige Systeme ist sofort möglich.

Treten mehrere Verzögerungen auf, wie etwa in der Gleichung

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(y(t), y(t-1), \dots, y(t-m)) \quad , \quad m \in \mathbb{N} \quad , \quad m \geq 2 \quad ,$$

dann betrachten wir das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt}x_k(t) = f(x_k(t), \dots, x_{k+m}(t)) \quad , \quad k = 1, \dots, m \quad ;$$

die Indizes werden dabei modulo m gerechnet.

Ist x eine Lösung dieses Systems, die der Bedingung (2.3) genügt, dann betrachten wir die Funktion

$$y: [-m, 0] \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad y(t-k) := x_k(t) \quad , \quad t \in [0, 1] \quad , \quad k = 1, \dots, m.$$

Wir zeigen:

- (1) y ist stetig, $y(-m) = y(0)$, und y ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und m -periodisch fortsetzbar.
- (2) y ist eine Lösung der Differenzen-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(y(t), \dots, y(t-m)) \quad .$$

Beweis:

- (1) $y(-k^+) = x_k(0) = x_{k+1}(1) = y(-k^-)$ für $k = 1, \dots, m-1$;
 $y(-m^+) = x_m(0) = x_1(1) = y(0^-)$;
- (2) $\frac{d}{dt}x_k(t) = f(x_k(t), \dots, x_{k+m}(t))$, $t \in (0, 1)$, $k = 1, \dots, m \Rightarrow$
 $\frac{d}{dt}y(t-k) = f(y(t-k), \dots, y(t-k-m))$, $t \in (0, 1)$, $k = 1, \dots, m$;

da y eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist und für $t \in (j, j+1)$, $j \in \mathbb{Z}$ die Differentialgleichung erfüllt, ist y auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar und erfüllt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung.

Man wird also auf ein Randwertproblem für explizite oder implizite Differentialgleichungen geführt.

Die Anzahl der Gleichungen des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems ist nicht notwendigerweise durch m bestimmt. Es können durchaus Systeme mit unterschiedlicher Gleichungsanzahl für dieselbe Differenzen-Differentialgleichung betrachtet werden. Dadurch können unter Umständen periodische Lösungen mit verschiedener Periode für eine Differenzen-Differentialgleichung nachgewiesen werden.

Im nächsten Abschnitt wollen wir die Frage nach der Existenz von Lösungen von (2.2) untersuchen, die der Randbedingung (2.3) genügen.

2.2 Ein Randwertproblem für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

In 2.1 haben wir gesehen, wie uns das Existenzproblem periodischer Lösungen von Differenzen-Differentialgleichungen auf ein Randwertproblem für gewöhnliche Differentialgleichungen führt.

Setzen wir in (2.3) statt B die Einheitsmatrix, so sehen wir die Ähnlichkeit unserer Fragestellung mit dem Existenzproblem periodischer Lösungen autonomer Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. Um unser Problem zu lösen, greifen wir auf ein einfaches Hopf-Verzweigungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen zurück, wie es sich zum Beispiel in [06], S.312 findet. Bevor wir dieses Verfahren anwenden können, müssen wir unsere Fragestellung abwandeln. Wir ersetzen die Randbedingung $x(0) = Bx(1)$ durch die Randbedingung $x(0) = Bx(\tau)$ mit $\tau \in \mathbb{R}^+$. Nach geeigneter Modifikation des Hopf-Verzweigungsverfahrens erhalten wir einen Verzweigungssatz für Lösungen, die die Randbedingung $x(0) = Bx(\tau)$ mit $\tau \in \mathbb{R}^+$ erfüllen.

Dieser Satz ist für den Fall, daß B die Einheitsmatrix ist, ein einfacher Hopf-Verzweigungssatz für gewöhnliche Differentialgleichungssysteme. Wir können ihn deshalb in diesem Sinn als eine Verallgemeinerung betrachten.

2.2.1 Satz

Gegeben sei ein offenes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ und $p, n \in \mathbb{N}$ mit $p, n > 2$. Die Funktion $\omega: J \rightarrow \mathbb{C}$, $a \mapsto \omega(a)$ sei p -mal stetig differenzierbar. Für jedes $a \in J$ sei weiter eine Matrix $D(a)$ aus $M_{n-2, n-2}$, dem Raum der $(n-2) \times (n-2)$ Matrizen über $\mathbb{C}$ gegeben, deren Elemente p -mal nach a stetig differenzierbar seien. Die Matrix $\tilde{A}(a)$ für $a \in J$ sei gegeben durch

$$\tilde{A}(a) := \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\omega(a)) & \operatorname{Im}(\omega(a)) & 0 \\ -\operatorname{Im}(\omega(a)) & \operatorname{Re}(\omega(a)) & 0 \\ 0 & 0 & D(a) \end{bmatrix} ;$$

F sei eine p-mal stetig differenzierbare Funktion

$$F: J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (a, y) \mapsto F(a, y)$$

mit $F(a, 0) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial y} F(a, 0) = 0$ für alle $a \in J$.

Gegeben sei weiter $\phi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die Matrix $\tilde{B} \in M_{n,n}$ durch

$$\tilde{B} := \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{bmatrix};$$

dabei sei $Z \in M_{n-2, n-2}$.

Für jedes $a \in J$ vertausche $F(a, \cdot)$ und $\tilde{A}(a)$ mit $\tilde{B}$; also $F(a, \tilde{B}y) = \tilde{B}F(a, y)$ und $\tilde{A}(a)\tilde{B}y = \tilde{B}\tilde{A}(a)y$ für alle $(a, y) \in J \times \mathbb{R}^n$.

Es gebe ein $k \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $(a, y) \in J \times \mathbb{R}^n$

$$|\tilde{A}(a)y + F(a, y)| \leq k$$

gilt.

Schließlich gebe es ein $a_0 \in J$ und ein $\tau_0 \in \mathbb{R}^+$, so daß gilt:

$$\omega(a_0) = -i\phi \frac{1}{\tau_0}, \quad \frac{d}{da} \operatorname{Re}(\omega(a_0)) \neq 0$$

und

$$\det(Ze^{D(a_0)\tau_0} - I_{n-2}) \neq 0;$$

dabei ist $I_{n-2} \in M_{n-2, n-2}$ die Einheitsmatrix.

Dann gibt es ein offenes Intervall U in $\mathbb{R}$ mit $0 \in U$ und stetige Funktionen

$$a: U \rightarrow J, \quad c \mapsto a(c), \quad a(0) = a_0$$

$$\tau: U \rightarrow J, \quad c \mapsto \tau(c), \quad \tau(0) = \tau_0$$

$$d_i: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad c \mapsto d_i(c), \quad d_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n-2,$$

so daß die Lösung der Gleichung

$$(2.4) \quad \frac{d}{dt} y(t) = \tilde{A}(a)y(t) + F(a, y(t))$$

zum Parameter $a(c) \in J$, $c \in U$ und dem Anfangswert

$(0, c(0, 1, d_1(c), \dots, d_{n-2}(c)))' \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ die Gleichung

$$(2.5) \quad \tilde{B}y(t) = y(t - \tau(c))$$

erfüllt.

Beweis:

(1) Wir führen zunächst eine kleine Vorüberlegung aus, die uns den Ansatz für den eigentlichen Beweis liefert.

(i) Zu jedem $a \in J$ und jedem Anfangswert $(0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung (2.4).

Da $|\tilde{A}(a)y + F(a, y)| < k$ für alle $(a, y) \in J \times \mathbb{R}^n$ und $F(a, \cdot)$ differenzierbar ist, existieren die Lösungen von (2.4) für alle $t \in \mathbb{R}$. Mit der Variation der Konstanten erhalten wir folgende Darstellung der Lösung zum Anfangswert $(0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ von (2.4) für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$y(t) = e^{\tilde{A}(a)t} \left[y_0 + \int_0^t e^{-\tilde{A}(a)s} F(a, y(s)) ds \right].$$

(ii) Gilt für eine Lösung y von (2.4) $\tilde{B}y(\tau_1) = y(0)$ für ein $\tau_1 \in \mathbb{R}^+$, dann erfüllt y die Gleichung $\tilde{B}y(t + \tau_1) = y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Dies sieht man so:

Die Funktion $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \tilde{B}y(t + \tau_1) =: z(t)$ ist eine Lösung von (2.4), da y eine Lösung ist, und $\tilde{A}(a)$ und $F(a, \cdot)$ mit $\tilde{B}$ vertauschen. Für $z(0)$ erhalten wir $z(0) = \tilde{B}y(\tau_1) = y(0)$. Da die Lösungen von (2.4) durch ihren Anfangswert eindeutig bestimmt sind, ergibt sich $\tilde{B}y(t + \tau_1) = z(t) = y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(2) Nun zeigen wir die Existenz der Funktionen aus der Behauptung des Satzes. Dazu benutzen wir folgende Funktion.

$$H: \mathbb{R} \times J \times \mathbb{R}^{n-2} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\tau, a, d, c) \mapsto H(\tau, a, d, c),$$

$$H(\tau, a, d, c) := (\tilde{B}e^{\tilde{A}(a)\tau} - I_n) \tilde{d} + \frac{1}{c} \int_0^\tau \tilde{B}e^{(\tau-s)\tilde{A}(a)} F(a, y(s, a, c\tilde{d})) ds.$$

Dabei ist $I_n \in M_{n,n}$ die Einheitsmatrix, $\tilde{d} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ d \end{bmatrix}$ und $y(\cdot, a, c\tilde{d})$

die Lösung der Gleichung (2.4) zum Parameter $a \in J$ und dem Anfangswert $(0, y_0) = (0, c\tilde{d}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Aus den Überlegungen in (1) ergibt sich, daß jedes $(\tau, a, d, c) \in \mathbb{R} \times J \times \mathbb{R}^{n-2} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ mit $H(\tau, a, d, c) = 0$ eine Lösung $y(\cdot, a, c\tilde{d})$ liefert, die die Gleichung $\tilde{B}y(t+\tau) = y(t)$ erfüllt. Um die Existenz derartiger (τ, a, d, c) nachzuweisen, verwenden wir den Satz über implizite Funktionen. Dazu zeigen wir:

(i) H besitzt für die Punkte $(\tau, a, d, 0) \in \mathbb{R} \times J \times \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}$ eine stetige Fortsetzung.

(ii) Die Fortsetzung ist in einer Umgebung von $(\tau_0, a_0, 0, 0)$ stetig differenzierbar. Bezeichnet H auch die Fortsetzung, dann gilt:

$$H(\tau, a, d, 0) = (\tilde{B}e^{\tilde{A}(a)\tau - I_n})\tilde{d} \text{ für alle } (\tau, a, d, 0) \in \mathbb{R} \times J \times \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}.$$

$$H(\tau_0, a_0, 0, 0) = 0 \text{ und } \det\left(\frac{\partial}{\partial(\tau, a, d)}H|_{(\tau_0, a_0, 0, 0)}\right) \neq 0.$$

Beweis der Aussage (2) (i)

Für alle $(t, a) \in \mathbb{R} \times J$ ist $y(t, a, \cdot)$ mindestens zweimal stetig nach dem Anfangswert differenzierbar, und $y(t, a, 0) = 0$. Also läßt sich $y(t, a, \cdot)$ in eine Taylor-Reihe nach dem Anfangswert um 0 entwickeln. Wir erhalten:

$$y(t, a, c\tilde{d}) = y(t, a, 0) + r(t, a, c\tilde{d}) \cdot c\tilde{d} = r(t, a, c\tilde{d}) \cdot c\tilde{d};$$

dabei ist $r(t, a, c\tilde{d}) \in M_{n,n}$, und jedes Element der Matrix $r(t, a, c\tilde{d})$ ist nach $(t, a, c\tilde{d})$ stetig differenzierbar.

F ist mindestens dreimal stetig differenzierbar, und es ist

$$F(a, 0) = 0 \text{ und } \frac{\partial}{\partial y}F(a, 0) = 0, \text{ für alle } a \in J.$$

Jede Komponente $F_i: J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, y) \mapsto F_i(a, y)$, $i=1, \dots, n$ von F können wir für jedes $a \in J$ in eine Taylor-Reihe nach y um 0 entwickeln. Wir erhalten:

$$F_i(a, y) = y'R_i(a, y)y, \quad i=1, \dots, n;$$

$R_i(a, y)$ ist dabei aus $M_{n,n}$, und die Elemente von $R_i(a, y)$ sind stetig nach (a, y) differenzierbar (Restformel von Lagrange).

Benutzen wir diese beiden Entwicklungen, erhalten wir für jede Komponente F_i von F für $i=1, \dots, n$

(2.6)

$$\frac{1}{c} F_i(a, y(t, a, c\tilde{d})) = c\tilde{d}' r(t, a, c\tilde{d})' R_i(a, y(s, a, c\tilde{d})) r(s, a, c\tilde{d}) \tilde{d}.$$

Daraus folgt die stetige Fortsetzbarkeit von H in die Punkte $(\tau, a, d, 0) \in \mathbb{R} \times J \times \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^n$. H bezeichne von nun an die Fortsetzung.

(ii) (2.6) zeigt auch, daß H in einer Umgebung von $(\tau_0, a_0, 0, 0)$ stetig differenzierbar ist, und daß der Grenzwert

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c} F_i(a, y(t, a, c\tilde{d})) = 0$$

lokal gleichmäßig in t, a und $\tilde{d}$ ist.

Damit ist für alle $(\tau, a, d, 0) \in \mathbb{R} \times J \times \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^n$

$$H(\tau, a, d, 0) = (\tilde{B} e^{\tilde{A}(a) \tau} - I_n) \tilde{d}.$$

Nun berechnen wir $\frac{\partial}{\partial(\tau, a, d)} H|_{(a_0, \tau_0, 0, 0)}$.

Für $i=1, \dots, n-2$ erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial d_i} H|_{(\tau_0, a_0, 0, 0)} = \frac{d}{dd_i} [\tilde{B} e^{\tilde{A}(a_0) \tau_0} - I_n] \cdot d_i \cdot e_{i+2} |_{d_i=0} :$$

dabei ist e_{i+2} der $(i+2)$ -te Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$, das heißt das $(i+2)$ -te Element ist gleich 1 und alle anderen gleich 0.

Also ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial d_i} H|_{(\tau_0, a_0, 0, 0)} = [\tilde{B} e^{\tilde{A}(a_0) \tau_0} - I_n] e_{i+2} \text{ für } i=1, \dots, n-2.$$

Weiter ist

$$\frac{\partial}{\partial \tau} H|_{(\tau_0, a_0, 0, 0)} = \frac{d}{d\tau} [\tilde{B} e^{\tilde{A}(a_0) \tau} - I_n] e_2 |_{\tau=\tau_0} = \tilde{B} e^{\tilde{A}(a_0) \tau_0} \tilde{A}(a_0) e_2$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} H|_{(\tau_0, a_0, 0, 0)} &= \frac{d}{da} [\tilde{B} e^{\tilde{A}(a) \tau_0} - I_n] e_2 |_{a=a_0} = \\ &= \tilde{B} e^{\tilde{A}(a_0) \tau_0} \tau_0 \frac{d}{da} \tilde{A}(a_0) e_2. \end{aligned}$$

Für $e^{\tilde{A}(a_0)\tau_0}$ erhalten wir mit $\omega(a_0) = -i\phi/\tau_0$

$$e^{\tilde{A}(a_0)\tau_0} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & e^{D(a_0)\tau_0} \end{bmatrix}$$

und

$$\tilde{B}e^{\tilde{A}(a_0)\tau_0} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Ze^{D(a_0)\tau_0} \end{bmatrix} ;$$

damit erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial(\tau, a, d)} H|(\tau_0, a_0, 0, 0) = \begin{bmatrix} -\phi/\tau_0 & \tau_0 \frac{d}{da} \operatorname{Im}(\omega(a_0)) & 0 \\ 0 & \tau_0 \frac{d}{da} \operatorname{Re}(\omega(a_0)) & 0 \\ 0 & 0 & Ze^{D(a_0)\tau_0 - I_{n-2}} \end{bmatrix}.$$

Nach Voraussetzung ist $\det[Ze^{D(a_0)\tau_0 - I_{n-2}}] \neq 0$, und es wird

$$\det \begin{bmatrix} -\phi & \frac{d}{da} \operatorname{Im}(\omega(a_0)) \\ 0 & \frac{d}{da} \operatorname{Re}(\omega(a_0)) \end{bmatrix} = -\phi \frac{d}{da} \operatorname{Re}(\omega(a_0)) \neq 0.$$

Also ist $\det[\frac{\partial}{\partial(\tau, a, d)} H|(\tau_0, a_0, 0, 0)] \neq 0$.

Schließlich wird $H(\tau_0, a_0, 0, 0) = (\tilde{B}e^{\tilde{A}(a_0)\tau_0 - I_n})e_2 = 0$.

Damit liefert der Satz über implizite Funktionen das Intervall $U(0) \subset \mathbb{R}$ und die Funktionen a, τ, d_i auf U , so daß $H(\tau(c), a(c), d(c), c) = 0$ ist für alle $c \in U$. Mit (1) sind dann $\tau, a, d_i: U \rightarrow \mathbb{R}, i=1, \dots, n-2$ die im Satz behaupteten Funktionen.

◇

2.2.2 Bemerkung

(1) Die Voraussetzung der Vertauschbarkeit von $\tilde{B}$ und F kann fallen gelassen werden. Mit Hilfe der im Beweis gezeigten Aussagen (1) und (2) kann man bei einem analogen konstruktiven Vorgehen, wie es in 2.1 für Gleichungen mit

mehreren Verzögerungen dargestellt wurde, stetige periodische Lösungen der Differenzen-Differentialgleichung gewinnen. Für retardierte Gleichungen sind diese Lösungen noch stetig differenzierbar; für neutrale Gleichungen sind sie möglicherweise nicht mehr stetig differenzierbar.

(2) Um den Satz 2.2.1 zum Beispiel auf die Gleichung (2.2) anwenden zu können, führen wir nur eine Zeittransformation durch.

Ist y eine Lösung von (2.4), und gilt $\tilde{B}y(t+\tau) = y(t)$, für alle $t \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, dann betrachten wir folgende Funktion:

$$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto y(\tau t)/\tau =: x(t).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \dot{y}(\tau t) = \tilde{A}(a)y(\tau t) + F(a, y(\tau t)) = \\ &= (\tilde{A}(a)\tau)x(t) + F(a, \tau x(t)) =: \tilde{F}(a, \tau x(t)) \end{aligned}$$

und

$$\tilde{B}x(t+1) = \tilde{B}y(\tau(t+1))/\tau = y(\tau t)/\tau = x(t).$$

x ist also eine Lösung einer Gleichung mit zwei Verzweigungsparametern a und τ , und x erfüllt die Randbedingung $\tilde{B}x(1) = x(0)$.

(3) Benutzen wir 2.2.1 um unser Problem aus 2.1 zu lösen, benötigen wir zwei Verzweigungsparameter. Als Folge davon erhalten wir Lösungen, die der gleichen Randbedingung genügen.

(4) Betrachten wir den Fall, daß $\tilde{B}$ die Einheitsmatrix ist, dann können wir ebenfalls eine entsprechende Zeittransformation wie bei (2) ausführen. Wir erhalten mit Satz 2.2.1 periodische Lösungen, die statt einem Verzweigungsparameter und variabler Periode zwei Verzweigungsparameter und konstante Periode aufweisen.

□

2.3 Ein Verzweigungssatz für periodische Lösungen mit konstanter rationaler Periode der Gleichung

$$\frac{d}{dt}y(t) - af\left(\frac{d}{dt}y(t-1)\right) = g(by(t))$$

Bevor wir den ersten Verzweigungssatz für eine neutrale Differenzen-Differentialgleichung beweisen, zeigen wir einen Hilfssatz, der uns die Anwendung von Satz 2.2.1 erlauben wird.

2.3.1 Lemma

Gegeben sei eine j -mal stetig differenzierbare Funktion

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ mit $\frac{d}{dx}f(0) = 1$ und $f(0) = 0$, $j \in \mathbb{N}$.

Die Funktion $\tilde{F}$ sei definiert durch

$$\tilde{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (y_1, \dots, y_n)' \mapsto (f(y_1), \dots, f(y_n))'$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

J sei ein beschränktes offenes Intervall in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, und es sei $B \in M_{n,n}$ definiert durch

$$B := \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt:

(1) Zu jedem $(a_0, 0) \in J \times \mathbb{R}^n$ gibt es eine offene Umgebung $W \subset J \times \mathbb{R}^n$ mit $(a_0, 0) \in W$, ein offenes Intervall $J_0 \subset J$ und eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $(a_0, 0) \in J_0 \times U$, so daß die Abbildung

$$F: W \rightarrow J_0 \times U, (a, y) \mapsto (a, y - a\tilde{F}(B^m y))$$

eine j -mal stetig differenzierbare Umkehrabbildung

$$F^{-1}: J_0 \times U \rightarrow W \subset J \times \mathbb{R}^n, (a, y) \mapsto F^{-1}(a, y)$$

besitzt.

(2) F^{-1} ist gegeben durch die zwei Komponentenfunktionen

$$F_1^{-1}: J_0 \times U \rightarrow J_0, (a, y) \mapsto a,$$

$$F_2^{-1}: J_0 \times U \rightarrow \mathbb{R}^n, (a, y) \mapsto F_2^{-1}(a, y).$$

(3) Zu jedem $a \in J_0$ sei F_a^{-1} die durch F_2^{-1} auf U induzierte Funktion

$$F_a^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R}^n, y \mapsto F_a^{-1}(y) := F_2^{-1}(a, y);$$

für F_a^{-1} gilt:

$$F_a^{-1}(By) = BF_a^{-1}(y) \text{ für alle } (a, y) \in J_0 \times U.$$

Die Funktionalmatrix $\frac{\partial}{\partial y} F_a^{-1}(0)$ und B besitzen dasselbe orthogonale Eigenvektorsystem.

Beweis:

(1) Für $a_0 \in J$ berechnen wir die Determinante der Funktionalmatrix von F an der Stelle $(a_0, 0) \in J_0 \times \mathbb{R}^n$.

Wegen $\frac{\partial}{\partial y} \tilde{F}(0) = I_n$, wobei I_n die Einheitsmatrix aus $M_{n,n}$ ist, folgt

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial(a,y)} F\right)(a_0, 0) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{F}(0) & I_n - a_0 \cdot B^m \end{bmatrix}$$

$$\text{und } \det\left(\frac{\partial}{\partial(a,y)} F\right)(a_0, 0) = \det(I_n - a_0 \cdot B^m).$$

Für die Eigenwerte z_k und die Eigenvektoren u_k , $k=1, \dots, n$ von B ergibt sich

$$z_k = e^{2i\pi \cdot \frac{k}{n}}, \quad u_k = (z_k^0, z_k^1, \dots, z_k^{n-1})^T.$$

Dies sieht man durch einfaches Nachrechnen.

Die u_k sind die Eigenvektoren von $I_n - a_0 \cdot B^m$ zu den Eigenwerten $\omega_k = 1 - a_0 \cdot z_k^m$, $k=1, \dots, n$.

Da $|a_0| \neq 1$ ist und $|z_k^m| = 1$, folgt

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial(a,y)} F\right)(a_0, 0) = \det(I_n - a_0 \cdot B^m) = \prod_{k=1}^n (1 - a_0 \cdot z_k^m) \neq 0.$$

Also gibt es mit dem Satz über implizite Funktionen zu jedem $(a_0, 0) \in J \times \mathbb{R}^n$ offene Umgebungen $W_1, W_2 \subset J \times \mathbb{R}^n$ mit $(a_0, 0) \in W_1$ derart, daß die Abbildung

$$F_0: W_1 \rightarrow W_2, (a, y) \mapsto (a, y - a\tilde{F}(B^m y))$$

eine j -mal stetig differenzierbare Umkehrabbildung besitzt.

Weiter ist $F_0(a_0, 0) = (a_0, 0) \in W_2$.

Somit gibt es ein offenes Intervall $J_0 \subset J$ mit $a_0 \in J_0$ und eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in U$, so daß $J_0 \times U \subset W_2$ ist. Ist $W \subset W_1$ das Urbild von $J_0 \times U$ in W_1 bezüglich F_0 , dann gibt es für die Abbildung

$$F: W \rightarrow J_0 \times U, (a, y) \mapsto (a, y - a\tilde{F}(B^m y))$$

die in (1) behauptete Umkehrabbildung.

Die Behauptung aus (2) ist klar.

(3) Für jedes $a \in J_0$ sei $W_a := F_a^{-1}(U)$

$$F_a: W_a \rightarrow U, y \mapsto y - a\tilde{F}(B^m y).$$

F_a^{-1} ist die Inverse von F_a .

Da B mit $\tilde{F}$ vertauscht, gilt $B F_a = F_a B$ für alle $a \in J_0$. Damit folgt $F_a^{-1} B y = B F_a^{-1} y$ für alle $(a, y) \in J_0 \times U$.

Außerdem ist

$$\frac{\partial}{\partial y} F_a(0) = I_n - a B^m \text{ und deshalb } \frac{\partial}{\partial y} F_a^{-1}(0) = (I_n - a B^m)^{-1}.$$

Also sind die u_k , $k=1, \dots, n$ auch die Eigenvektoren von $\frac{\partial}{\partial y} F_a^{-1}(0)$ zu den Eigenwerten ω_k^{-1} , $k=1, \dots, n$.

Die u_k sind paarweise orthogonal, denn

$$u_k \cdot \bar{u}_j = \sum_{i=1}^n z_{k-j}^i \text{ und für } k=j \text{ wird } u_k \cdot \bar{u}_j = n.$$

Für $k \neq j$ wird $u_k \cdot \bar{u}_j = (1 - z_{k-j}^n) / (1 - z_{k-j}) = 0$.

◇

2.3.2 Satz

Gegeben seien j -mal stetig differenzierbare Funktionen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x), g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x),$$

$$\text{mit } f(0) = g(0) = 0, \frac{d}{dx}f(0) = \frac{d}{dx}g(0) = 1, j \in \mathbb{N}, j > 2.$$

J sei ein beschränktes offenes Intervall mit $J \subset \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$.

Weiter sei $\phi := 2\pi \cdot k_0 \cdot m \cdot \frac{1}{n}$ mit $n, m, k_0 \in \mathbb{N}$, $n > m$, $n > 2$, $k_0 < \frac{1}{2}n$, m, n teilerfremd, $\phi \notin \frac{1}{2}\pi\mathbb{Z}$.

Es sei $a_0 := [\cos(\phi)]^{-1} \in J$ und $b_0 := -m \cdot \phi \cdot \tan(\phi) \neq 0$.

Dann gibt es eine Umgebung $V = V(0) \subset \mathbb{R}$, $0 \in V$ und stetig differenzierbare Funktionen

$$a: V \rightarrow \mathbb{R}, c \mapsto a(c) \text{ mit } a(0) = a_0,$$

$$b: V \rightarrow \mathbb{R}, c \mapsto b(c) \text{ mit } b(0) = b_0,$$

$$y: V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (c, t) \mapsto y(c, t) \text{ mit } y(0, \cdot) = 0.$$

derart, daß $y(c, \cdot)$ nichtkonstant ist für alle $c \in V \setminus \{0\}$, die Periode $\frac{1}{m}$ besitzt und

$$(2.7) \quad \frac{d}{dt}y(t) = a\left(\frac{d}{dt}y(t-1)\right) = g(b y(t)) \text{ mit}$$

$$a = a(c), b = b(c) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ erfüllt.}$$

Beweis:

Mit f definieren wir wie in Lemma 2.3.1 die Funktion

$$\tilde{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (y_1, \dots, y_n)' \mapsto (f(y_1), \dots, f(y_n))'$$

Nach Lemma 2.3.1 gibt es dann zu a_0 ein offenes Intervall $J_0 \subset \mathbb{R}$ mit $a_0 \in J_0$, eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in U$ und eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, so daß die Funktion

$$F_0: W \rightarrow J_0 \times U, (a, y) \mapsto (a, y - a\tilde{F}(B^m y))$$

eine j -mal stetig differenzierbare Umkehrabbildung

$$F_0^{-1}: J_0 \times U \rightarrow W, (a, y) \mapsto F_0^{-1}(a, y)$$

besitzt.

Sei

$$\rho: \mathbb{R} \rightarrow [0,1], \quad x \mapsto \rho(x)$$

eine j-mal stetig differenzierbare Funktion mit

$$\rho(x) = 1 \text{ für } |x| \leq 1, \quad \rho(x) = 0 \text{ für } |x| \geq 2.$$

Mit ρ wollen wir F_0^{-1} auf ganz $J_0 \times \mathbb{R}^n$ geeignet fortsetzen. Wir betrachten eine abgeschlossene Kreisscheibe $K_r(0) \subset U$ mit Mittelpunkt 0 und Radius $r > 0$.

Für $a \in J_0$ setzen wir

$$F^{-1}(a, y) := \begin{cases} F_0^{-1}(a, y) & \text{für } y \in K_r(0) \\ F_0^{-1}(a, y) \cdot \rho(|y|^2/r^2), & y \in \mathbb{R}^n, \quad r^2 \leq |y|^2 \leq 2r^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die durch F^{-1} zu jedem $a \in J_0$ induzierte Funktion

$$F_a^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto F_a^{-1}(y) := F_2^{-1}(a, y)$$

gilt:

- (1) F_a^{-1} ist beschränkt; $F_a^{-1}(0) = 0$;
- (2) $F_a^{-1} B y = B F_a^{-1} y$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$, $a \in J_0$;
- (3) F_a^{-1} ist j-mal stetig differenzierbar.

Es ist $\frac{\partial}{\partial y} F_a^{-1}(0) = (I_n - a B^m)^{-1}$, und B und $\frac{\partial}{\partial y} F_a^{-1}(0)$ haben dasselbe orthogonale Eigenvektorsystem.

(1) bis (3) folgen aus Lemma 2.3.1 und der Definition von ρ .

Weiter sei

$$G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (y_1, \dots, y_n)' \mapsto (g(y_1), \dots, g(y_n))';$$

Wir wollen auf die Gleichung

$$(2.8) \quad \frac{d}{dt} y(t) = F_a^{-1}(G(b_0 y(t)))$$

Satz 2.3.2 anwenden.

Durch Linearisierung erhalten wir die Gleichung

$$(2.9) \quad \frac{d}{dt}y(t) = b_0(I_n - aB^m)^{-1}y(t) + H(a, b_0, y(t)).$$

Dabei ist

$$H(\cdot, b_0, \cdot): J_0 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (a, y) \mapsto H(a, b_0, y)$$

eine j -mal stetig differenzierbare Funktion mit

$$H(a, b_0, 0) = 0 \text{ und } \frac{\partial}{\partial y}H(a, b_0, \cdot)|_{y=0} = 0 \text{ f\"ur alle } a \in J_0.$$

Aus Lemma 2.3.1 sehen wir, daß die Eigenwerte von $A(a) := (I_n - a \cdot B^m)^{-1} \cdot b_0$ gegeben sind durch $\omega_k(a) := b_0(1 - a \cdot z_k^m)^{-1}$ zu den Eigenvektoren u_k aus Lemma 2.3.1 mit $z_k = e^{2i\pi \cdot \frac{k}{n}}$, $k=1, \dots, n$.

Wir setzen $\omega(a) := \omega_{k_0}(a)$ und $z := z_{k_0}$ und zeigen:

Die Funktionen

$$\omega_k: J_0 \rightarrow \mathbb{C}, a \mapsto b_0(1 - az_k^m)^{-1} =: \omega_k(a), k=1, \dots, n$$

sind stetig differenzierbar;

$$\omega(a_0) = -i\phi / (\frac{1}{m}); \quad \frac{d}{da} \operatorname{Re}(\omega(a_0)) \neq 0;$$

$$\operatorname{Re}(\omega_k(a_0)) = 0 \iff k \in \{k_0, n-k_0\}.$$

Beweis:

Wegen $|a| \neq 1$ für $a \in J_0$ und $|z_k^m| = 1$, folgt die stetige Differenzierbarkeit der ω_k nach a.

Wir berechnen $\omega(a_0)$.

$$\begin{aligned} \omega(a_0) &= b_0(1 - a_0 z^m)^{-1} = \\ &= -m\phi \tan(\phi) \cdot (1 - \cos(\phi))^{-1} e^{i\phi} = -m\phi \tan(\phi) \cdot [-i \tan(\phi)]^{-1} = \\ &= -im\phi = -i\phi / (\frac{1}{m}); \end{aligned}$$

für die Realteile der ω_k folgt:

$$\omega_k(a_0) = K \cdot (1 - a_0 \cdot \overline{z_k^m}), \quad K := b_0 \cdot |1 - a_0 \cdot z_k^m|^{-2},$$

$$\operatorname{Re}(\omega_k(a_0)) = K \cdot (1 - a_0 \cdot \cos(m \cdot 2\pi \cdot \frac{k}{n}));$$

$$\operatorname{Re}(\omega_k(a_0)) = 0 \Leftrightarrow \cos(m \cdot 2\pi \cdot \frac{k}{n}) = \cos(m \cdot 2\pi \cdot \frac{k_0}{n}) \Leftrightarrow$$

$$m \cdot \frac{k}{n} = \pm m \cdot \frac{k_0}{n} + r_0 \text{ mit } r_0 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = \pm k_0 + n \cdot r_1, \quad r_1 \in \mathbb{Z},$$

weil m und n teilerfremd sind.

Da $k, k_0 \in \{1, \dots, n\}$ gilt, folgt nun

$$k = \pm k_0 + n \cdot r_1, \quad r_1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \in \{k_0, n-k_0\}.$$

Das ergibt $\operatorname{Re}(\omega_k(a_0)) = 0 \Leftrightarrow k \in \{k_0, n-k_0\}$.

Für die Ableitung erhalten wir

$$\frac{d}{da}[\omega_k(a)(1-az_k^m)] = 0;$$

$$[\frac{d}{da}\omega_k(a)](1-az_k^m) + \omega_k(a)(-z_k^m) = 0; \quad \frac{d}{da}\omega_k(a) = \frac{1}{b_0}\omega_k^2(a)z_k^m.$$

Wir haben oben gesehen, daß $\operatorname{Re}(\omega(a_0)) = 0$ ist. Damit folgt

$$\frac{d}{da}\omega(a_0) = -\frac{1}{b_0} \cdot z_{k_0}^m \cdot m^2 \phi^2 = -\frac{1}{b_0} [\cos(\phi) + i \sin(\phi)] \cdot m^2 \phi^2,$$

und deshalb ist $\frac{d}{da}\operatorname{Re}(\omega(a_0)) \neq 0$.

Die Matrizen $A(a)$, $a \in J_0$ und B haben das gleiche orthogonale Eigenvektorsystem. Damit gibt es unitäre Matrizen $S, S^{-1} \in M_{n,n}$, so daß $\tilde{A}(a) := SA(a)S^{-1}$ und $\tilde{B} := SBS^{-1}$ folgende Gestalt haben.

$$\tilde{A}(a) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\omega(a)) & \operatorname{Im}(\omega(a)) & 0 \\ -\operatorname{Im}(\omega(a)) & \operatorname{Re}(\omega(a)) & 0 \\ 0 & 0 & D(a) \end{bmatrix} \quad \tilde{B}^m = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{bmatrix}$$

mit $D(a), Z \in M_{n-2, n-2}$.

Wir betrachten statt der Gleichung (2.9) die transformierte Gleichung

$$(2.10) \quad \frac{d}{dt}y(t) = \tilde{A}(a)y(t) + \tilde{H}(a, b_0, y(t))$$

mit $\tilde{H}(a, b_0, y) := SH(a, b_0, S^{-1}y)$.

Da jede Lösung y von (2.10) mit $S^{-1}y$ eine Lösung von (2.9) liefert, genügt es die Behauptung des Satzes für die Gleichung (2.10) zu zeigen.

Da Z und $D(a)$ wieder die gleichen Eigenvektoren besitzen, ergibt sich mit den Eigenwerten von $I_{n-2} - Ze^{\frac{1}{m}D(a_0)}$

$$\det(I_{n-2} - Ze^{\frac{1}{m}D(a_0)}) = \prod_{j \in I} (1 - z_m^j \cdot e^{\frac{1}{m}\omega_j(a_0)}),$$

$$I := \{1, \dots, n\} \setminus \{k_0, n-k_0\}.$$

Da $\operatorname{Re}(\omega_j(a_0)) \neq 0$ für $j \in I$ nach dem oben gezeigten gilt, ist $\det(I_{n-2} - Ze^{\frac{1}{m}D(a_0)}) \neq 0$.

Nach dem Satz 2.2.1 gibt es nun eine Umgebung $V = V(0) \subset \mathbb{R}$ und stetig differenzierbare Funktionen

$$a, \tau: V \rightarrow \mathbb{R}, d: V \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } a(0) = a_0, \tau(0) = \frac{1}{m} \text{ und } d(0) = 0,$$

so daß die Lösung $y(\cdot) = y(a(c), \cdot, \tau(c), d(c))$ der Gleichung (2.10) zum Parameter $a(c)$ und dem Anfangswert $d(c)$ die Gleichung (2.11) $\tilde{B}y(t+\tau) = y(t)$ erfüllt.

Ohne Einschränkung können wir $\tau(c) \neq 0$ für alle $c \in V$ annehmen. Betrachten wir die Funktion $x(c, t) := S^{-1}y(m\tau(c) \cdot t) / (m\tau(c))$, $t \in \mathbb{R}$, $c \in V$, so ist x stetig differenzierbar in t und c . Weiter ist

$$\frac{d}{dt}x(c, t) = \frac{d}{dt}S^{-1}y(m\tau(c) \cdot t) = F_{a(c)}^{-1}(G(b_0x(c, t) \cdot m\tau(c)));$$

$$\begin{aligned} m\tau(c)Bx(c, t + \frac{1}{m}) &= BS^{-1}y(m\tau(c) \cdot t + \tau(c)) = \\ &= S^{-1}y(m\tau(c) \cdot t) = m\tau(c) \cdot x(c, t); \end{aligned}$$

$$B^m x(c, t+1) = x(c, t); \text{ damit ist } B^m \frac{d}{dt}x(c, t) = \frac{d}{dt}x(c, t-1);$$

$B^n = I_n$; deshalb ist $x(c, t + \frac{1}{m}n) = B^n x(c, t + \frac{1}{m}n) = x(c, t)$, und $x(c, \cdot)$ ist in t periodisch mit der Periode $\frac{1}{m}n$. Da x stetig von $c \in V$ abhängt, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $G(m\tau(c) \cdot b_0 \cdot x(c, t))$ für alle $(c, t) \in V \times \mathbb{R}$ in $K_r(0)$ liegt. Damit erfüllt $x(c, \cdot)$ die Gleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) - a(c)F(\frac{d}{dt}x(t-1)) = G(m\tau(c) \cdot b_0 x(t)).$$

Betrachten wir diese Gleichung komponentenweise für $k=1, \dots, n$ und berücksichtigen $B \frac{d}{dt} x(c, t) = \frac{d}{dt} x(c, t-1)$, dann erhalten wir

$$\frac{d}{dt} x_k(c, t) - a(c) \cdot f\left(\frac{d}{dt} x_k(c, t-1)\right) = g(m \cdot \tau(c)) \cdot b_0 \cdot x_k(c, t);$$

dann liefern V und die Funktionen $a = a(c)$, $x_k = x_k(c, t)$ und $b: V \rightarrow \mathbb{R}$, $b: c \mapsto b(c) := b_0 \cdot m \cdot \tau(c)$ die Behauptung des Satzes.

◇

2.3.3 Bemerkung

a) Die Voraussetzungen über a_0 und b_0 liefern im Satz 2.3.2 gerade ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte der Matrix $A(a)$ der linearen Gleichung, so daß die Realteile der Eigenwerte für $a=a_0$ verschwinden, und die Ableitungen der Realteile nach a ungleich 0 sind.

Dies bedeutet, wie bei der Hopf-Verzweigung periodischer Lösungen, daß die Lösungsoperatoren der linearen Gleichung ein Paar Eigenwerte besitzen, die für $a=a_0$ den Rand des Einheitskreises mit endlicher Geschwindigkeit schneiden.

b) Im Fall $g(x) = x$ ist (2.7) die Goodwinsche Modellgleichung.

□

3. Über neutrale Funktional-Differentialgleichungen

In Abschnitt 1.4 haben wir gesehen, wie wir aus Lösungen der Gleichung (1.8) Lösungen der Gleichung (1.7) gewinnen können.

Diese Beobachtung ermöglicht es uns die Theorie über Funktional-Differentialgleichungen, wie sie etwa in [17] entwickelt wird, zur Anwendung zu bringen.

Bevor wir mit den Untersuchungen beginnen, sind einige Vorbemerkungen erforderlich.

Sei $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto y(t)$ eine Lösung der Differenzen-Differentialgleichung

$$(3.1) \quad \frac{d}{dt}[y(t) - f(y(t-1))] = g(y(t))$$

Zu $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir statt $y(t) \in \mathbb{R}$ die Funktion $y_t \in C$, die durch

$$y_t: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \theta \mapsto y_t(\theta) := y(t+\theta)$$

gegeben ist.

Definieren wir die Abbildungen

$$F: C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto g(\phi(0)), \quad D: C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto \phi(0) - f(\phi(-1)),$$

dann erfüllt y die Gleichung

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt}D(y_t) = F(y_t), \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R};$$

das heißt, daß die Funktion $D(y.): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto D(y_t)$ stetig nach t differenzierbar ist, und daß die Funktionen

$$\frac{d}{dt}D(y.): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{d}{dt}D(y_t), \quad F(y.): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(y_t)$$

identisch sind.

Lassen wir für D und F in (3.2) 'beliebige' Abbildungen von C nach $\mathbb{R}$ zu, dann bilden diese Gleichungen eine Klasse von Differentialgleichungen, die die Differenzen-Differentialgleichungen umfaßt.

In Abschnitt 3.1 geben wir als erstes eine Definition für die Lösung einer Funktional-Differentialgleichung. Der darauf folgende Satz behandelt die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen zu gegebenen Anfangswerten für eine Klasse nichtlinearer Funktional-Differentialgleichungen. Das zweite wichtige Ergebnis dieses Abschnitts liefert eine Aussage über das Wachstum der Lösungen und ihre Abhängigkeit von Anfangswerten und bestimmten Parametern.

In Abschnitt 3.2 werden lineare Funktional-Differentialgleichungen untersucht. Die Resultate dieses Abschnitts gehen im wesentlichen auf die Arbeiten [21] und [24] zurück. Aufbauend auf den Ergebnissen von Abschnitt 3.1 und 3.2 wird im Abschnitt 3.3 eine neue Beweisvariante entwickelt, um die Existenz invarianter Lösungsmannigfaltigkeiten für bestimmte nichtlineare Funktional-Differentialgleichungen zu zeigen. Abschnitt 3.4 bringt dann das Hauptergebnis, einen Hopf-Verzweigungssatz für eine Klasse nichtlinearer Funktional-Differentialgleichungen.

3.1 Definitionen und grundlegende Sätze für bestimmte Funktional-Differentialgleichungen

In [21] wird die Existenz von Lösungen auf $\mathbb{R}^+$ für lineare Funktional-Differentialgleichungen nachgewiesen. In [17] werden die lokale Existenz von Lösungen und deren Fortsetzbarkeit für eine sehr große Klasse von Funktional-Differentialgleichungen gezeigt.

Wir geben in diesem Abschnitt einen anderen Beweis für die Existenz von Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ für gewisse nichtlineare Funktional-Differentialgleichungen.

Zunächst zeigen wir die lokale Existenz von Lösungen. Dabei benutzen wir einen ähnlichen Ansatz wie Hale in [17].

Für die von uns betrachteten Gleichungen können wir jedoch den Existenzbeweis einfacher als in [17] gestalten. Wir benötigen nicht einen Fixpunktsatz für verdichtende Abbildungen. In unserem Beweis genügt der Fixpunktsatz von Banach.

Außerdem wird ersichtlich, daß eine Fortsetzung der Lösungen auf $\mathbb{R}^+$ für unsere nichtlinearen Gleichungen in entsprechender Weise möglich ist, wie dies in [21] für lineare Gleichungen der Fall war.

Die Fortsetzung der Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$ gelingt uns schließlich durch Betrachtung von Lösungen weiterer geeigneter nichtlinearer Funktional-Differentialgleichungen. Darüber hinaus zeigen wir in Abschnitt 3.1, daß das Wachstum der Lösungen der betrachteten Gleichungen exponentiell beschränkt ist. Aus diesem Ergebnis über das Wachstum gewinnen wir eine ausreichend starke Aussage über die stetige Abhängigkeit der Lösungen von Anfangswerten und Parametern.

Gegeben seien stetige Abbildungen $D, F: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}$.

3.1.1 Definition

(Lösung einer Funktional-Differentialgleichung)

(1) Sei eine stetige Funktion $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto y(t)$ und die Abbildung

$$\text{Tr}(y): \mathbb{R} \rightarrow C, \quad t \mapsto y_t, \quad y_t(\theta) := y(t+\theta), \quad \theta \in [-1, 0]$$

gegeben. Dann heißt die Menge $\text{Tr}(y) \cap C \subset C$ die **Trajektorie von y in C** oder kurz die **Trajektorie**.

(2) Seien $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ und $t_0 < t_1$.

Eine stetige Funktion $y: [-1+t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto y(t)$ erfüllt die Funktional-Differentialgleichung

$$(3.3) \quad \frac{d}{dt} D(t, y_t) = F(t, y_t),$$

wenn die Funktion $D(\cdot, y): (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto D(t, y_t)$ stetig differenzierbar ist, und die Funktionen

$$\frac{d}{dt} D(\cdot, y): (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{d}{dt} D(t, y_t),$$

$$F(\cdot, y): (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(t, y_t)$$

identisch sind.

Eine stetige Funktion $y: (-\infty, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto y(t)$ erfüllt die Gleichung (3.3), wenn für jedes $t_0 \in (-\infty, t_1)$ die Restriktion von y auf $[t_0-1, t_1]$ die Gleichung (3.3) erfüllt.

Eine stetige Funktion $y: [t_0-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto y(t)$ erfüllt die Gleichung (3.3), wenn für jedes $t_1 \in (t_0, +\infty)$ die Restriktion von y auf $[t_0-1, t_1]$ die Gleichung (3.3) erfüllt.

Eine stetige Funktion $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto y(t)$ heißt eine **Lösung** der Funktional-Differentialgleichung (3.3), wenn die Funktion $D(\cdot, y): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto D(t, y_t)$ stetig differenzierbar ist, und die Funktionen

$$\frac{d}{dt} D(\cdot, y): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{d}{dt} D(t, y_t), \quad F(\cdot, y): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto F(t, y_t)$$

identisch sind.

(3) Ist ein $(t_0, \phi) \in \mathbb{R} \times C$ gegeben, dann heißt eine stetige Funktion $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems von (3.3) zum Anfangswert (t_0, ϕ) , wenn y eine Lösung von (3.3) ist, und $y_{t_0} = \phi$ gilt.

□

3.1.2 Bemerkung

(1) Bei dieser Definition einer Lösung wird nicht explizit die stetige Differenzierbarkeit von y oder die Differenzierbarkeit von y auch nur in einem Punkt des Definitionsbereiches verlangt. Gefordert wird nur die stetige Differenzierbarkeit der Funktion $t \mapsto D(t, y_t)$.

Damit steht für neutrale Gleichungen der gesamte Raum der stetigen Funktionen als Lösungsraum zur Verfügung.

(2) Ist D nicht explizit von t abhängig, können wir uns bei der Untersuchung auf die Anfangswertprobleme mit $t_0 = 0$ beschränken.

□

Bevor wir mit der Untersuchung der Funktional-Differentialgleichungen beginnen, notieren wir noch ein bekanntes Lemma für exponentielle Abschätzungen, welches wir oft benötigen werden.

3.1.3 Lemma (von Gronwall)

Gegeben seien Funktionen $u, c: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und eine Konstante $k \in \mathbb{R}^+$. u sei stetig, c monoton wachsend, und es gelte die Abschätzung

$$u(t) \leq c(t) + \int_{t_0}^t k \cdot u(s) ds \text{ für alle } t \in [t_0, t_1].$$

Dann gilt

$$u(t) \leq c(t) \cdot e^{k \cdot (t - t_0)} \text{ für alle } t \in [t_0, t_1].$$

Beweis:

Für einen Beweis siehe zum Beispiel [17] S.15ff.

◇

3.1.4 Folgerung

Gegeben seien Funktionen $v, d: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und eine Konstante $k \in \mathbb{R}^+$. v sei stetig, d monoton fallend, und es gelte die Abschätzung

$$v(t) \leq d(t) + \int_t^{t_1} k \cdot v(s) ds \text{ für alle } t \in [t_0, t_1].$$

Dann gilt

$$v(t) \leq d(t) \cdot e^{k \cdot (t_1 - t)} \text{ für alle } t \in [t_0, t_1].$$

Beweis:

Wir benutzen das Lemma 3.1.3. Dazu definieren wir die Funktionen

$$u, c: [-t_1, -t_0] \rightarrow \mathbb{R}^+, u: t \mapsto v(-t), c: t \mapsto d(-t);$$

dann ist c monoton wachsend, und es gilt:

$$u(t) = v(-t) \leq d(-t) + \int_{-t_1}^t k \cdot v(-s) ds;$$

mit dem bereits gezeigten Lemma 3.1.3 folgt nun für $t \in [t_0, t_1]$ die Behauptung

$$v(t) = u(-t) \leq d(t) \cdot e^{k \cdot (-t + t_1)}.$$

◇

Für die weiteren Untersuchungen benötigen wir den Vektorraum über $\mathbb{R}$ der Lipschitz-stetigen Abbildungen $h: C \rightarrow C$ mit $h0 = 0$ und globaler Lipschitz-Konstante. Wir bezeichnen diesen Vektorraum im weiteren mit B_0 . Die Abbildung

$$|\cdot|: B_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+, h \mapsto |h| := \sup\{|h\phi|/|\phi| \in \mathbb{R}^+ \mid \phi \in C \setminus \{0\}\}$$

definiert auf B_0 eine Norm. Zu jedem $p \in \mathbb{R}^+$ sei

$$B_p := \{h \in B_0 \mid |h\phi| \leq p, |h\phi - h\psi| \leq |\phi - \psi|, h0 = 0\}.$$

B_p ist eine vollständige Teilmenge aus B_0 . Für bestimmte Abbildungen $D, F: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}$ wollen wir die Existenz- und Eindeutigkeitsfrage für eine Lösung der Gleichung

$$\frac{d}{dt}D(t, y_t) = F(t, y_t)$$

zum Anfangswert $(t_0, \phi) \in \mathbb{R} \times C$ behandeln. Für Abbildungen D und F , die zusätzlich von Parametern $(a, h) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times B_p$ abhängen, werden wir die stetige Abhängigkeit der Trajektorie $\{y_t(a, \phi, h) \in C \mid t \in \mathbb{R}\}$ von (a, t, ϕ, h) sowie das Wachstumsverhalten der Lösungen diskutieren.

3.1.5 Satz (Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung)

Gegeben seien ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und stetige Abbildungen

$$f: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}, (t, \phi) \mapsto f(t, \phi), g: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}, (t, \phi) \mapsto g(t, \phi).$$

Mit a, f und g seien die Abbildungen

$$D: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}, (t, \phi) \mapsto \phi(0) - a\phi(-1) - g(t, \phi)$$

$$F: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}, (t, \phi) \mapsto f(t, \phi)$$

definiert.

Es gebe ein $q \in [0, 1)$, ein $l_0 \in \mathbb{R}_0^+$ und ein $L \in \mathbb{R}^+$ mit $L \geq q$, so daß für alle $(t, \phi), (t, \psi) \in \mathbb{R} \times C$ gilt:

$$|f(t, \phi) - f(t, \psi)| \leq L \cdot |\phi - \psi|, |g(t, \phi) - g(t, \psi)| \leq q \cdot |\phi - \psi| \quad (3.4)$$

$$|f(t, \phi)| \leq l_0 + L \cdot |\phi|, |g(t, \phi)| \leq l_0 + q \cdot |\phi|.$$

Mit $a_0 := |\frac{1}{a}|$ gelte

$$(3.5) \quad q \cdot a_0 < 1.$$

Dann gibt es zu jedem Anfangswert $(t_0, \phi) \in \mathbb{R} \times C$ genau eine Lösung $y = y(\cdot, \phi)$ der Funktional-Differentialgleichung

$$(3.6) \quad \frac{d}{dt}D(t, y_t) = F(t, y_t).$$

Beweis:

Im ersten Schritt des Beweises zeigen wir die Existenz genau einer stetigen Funktion $y: [-1+t_0, t_0+b_0] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto y(t)$ mit einem geeigneten $b_0 \in \mathbb{R}^+$, die Gleichung (3.6) erfüllt und der Anfangsbedingung $y_{t_0} = \phi$, $(t_0, \phi) \in \mathbb{R} \times C$ genügt.

Wir wählen ein $b_0 \in [0, 1]$, $b_0 < (1-q)/L \Leftrightarrow b_0 L + q < 1$, ein beliebiges $M \in \mathbb{R}_0^+$ und setzen

$$k = k(\phi, M) := \{3l_0 + M + |\phi| \cdot [b_0 \cdot L + 2(|a| + q)]\} / [1 - (b_0 \cdot L + q)] .$$

Nun wollen wir den Fixpunktsatz von Banach anwenden. Dazu sei weiter

$$S := \{z \in C([-1+t_0, t_0+b_0], \mathbb{R}) \mid z(t) = 0, t \leq t_0 \text{ und } |z| \leq k(\phi, M)\};$$

S ist eine nichtleere, beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $C([-1+t_0, t_0+b_0], \mathbb{R})$. Mit der Supremumsnorm $|\cdot|$ ist der Raum $C([-1+t_0, t_0+b_0], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von $[-1+t_0, t_0+b_0]$ nach $\mathbb{R}$ ein Banach-Raum.

Wir setzen:

$$r(t) := \begin{cases} \phi(t-t_0) & , t \in [-1+t_0, t_0] \\ \phi(0) & , t \in [t_0, t_0+b_0] \end{cases}$$

und betrachten zu jedem $z \in S$ die punktweise definierte Funktion

$$Tz: [-1+t_0, t_0+b_0] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto Tz(t)$$

$$Tz(t) := \begin{cases} 0 & , t \in [-1+t_0, t_0] \\ a \cdot (r(t-1) - r(t_0-1)) + g(t, z_t + r_t) - g(t_0, r_{t_0}) + \\ \quad + \int_{t_0}^t F(s, z_s + r_s) ds & , t \in [t_0, t_0+b_0] ; \end{cases}$$

da Tz eine stetige Funktion ist, erhalten wir durch

$$T: S \rightarrow C([-1+t_0, t_0+b_0], \mathbb{R}), z \mapsto Tz$$

einen Operator T von S nach $C([-1+t_0, t_0+b_0], \mathbb{R})$.

Wir zeigen: T ist eine Kontraktion auf S mit Bild in S .

Beweis:

(1) $Tz \in S$

Aufgrund der Definition von Tz ist nur $|Tz| \leq k$ nachzuweisen.

$$\begin{aligned} |Tz(t)| &\leq 2|a||r_{t_0}| + q|z_t| + 2q|r_{t_0}| + b_0 \cdot L[|z| + |r_{t_0}|] + 3l_0 \leq \\ &\leq [2(|a|+q) + b_0 L] \cdot |r_{t_0}| + 3l_0 + (b_0 L + q) \cdot k + M = \\ &= k, \text{ für } t \in [t_0, t_0 + b_0]; \end{aligned}$$

also ist $|Tz| \leq k$.

(2) T ist eine Kontraktion.

Für $z, x \in S$ und $t \in [t_0, t_0 + b_0]$ ergibt sich

$$|Tz(t) - Tx(t)| \leq q|z_t - x_t| + b_0 L|z - x| = q_1 \cdot |z - x|,$$

mit $q_1 := q + b_0 L \in (0, 1)$ wegen der Wahl von b_0 .

T hat nach dem Fixpunktsatz von Banach einen eindeutig bestimmten Fixpunkt in S . Sei $z \in S$ dieser Fixpunkt. Wir betrachten die Funktion

$$y: [-1 + t_0, t_0 + b_0] \rightarrow \mathbb{K}, \quad t \mapsto y(t) := z(t) + r(t).$$

Für diese Funktion gilt

$$y(t) = \phi(t - t_0), \quad t \in [-1 + t_0, t_0]$$

$$D(t, y_t) - D(t_0, y_0) =$$

$$\begin{aligned} &= z(t) + r(t) - a^*[z(t-1) + r(t-1)] - g(t, z_t + r_t) - \\ &\quad - \{z(t_0) + r(t_0) - a^*[z(t_0-1) + r(t_0-1)] - g(t_0, z_{t_0} + r_{t_0})\} = \\ &= \int_{t_0}^t F(s, z_s + r_s) ds = \int_{t_0}^t F(s, y_s) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + b_0], \end{aligned}$$

und y erfüllt die Funktional-Differentialgleichung (3.6) für $t \in (t_0, t_0 + b_0)$.

Nun zeigen wir, daß die Funktion y eindeutig bestimmt ist.

Sei $\tilde{y}$ eine weitere stetige Funktion

$$\tilde{y}: [-1+t_0, t_0+b_0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \tilde{y}(t),$$

die die Gleichung (3.6) erfüllt und der Anfangsbedingung

$$\tilde{y}_{t_0} = \phi \text{ genügt.}$$

Ohne Einschränkung des Existenzbeweises für y können wir, da $\tilde{y}$ stetig ist, annehmen, daß $|\tilde{y}(t) - r(t)| \leq M$ für alle $t \in [-1+t_0, t_0+b_0]$ gilt. Damit gilt für die Funktion

$$\tilde{z}: [-1+t_0, t_0+b_0], \quad t \mapsto \tilde{z}(t) := \tilde{y}(t) - r(t):$$

$$\tilde{z}(t) = 0 \text{ für } t \in [-1+t_0, t_0] \text{ und } |\tilde{z}| \leq M \leq k(\phi, M).$$

Also ist $\tilde{z} \in S$. Da $\tilde{y}$ Gleichung (3.6) erfüllt, der Anfangsbedingung $\tilde{y}_{t_0} = \phi$ genügt, und D , F und $\tilde{y}$ stetig sind, ist $\tilde{z}$ ein Fixpunkt von T in S .

Wegen der Eindeutigkeit dieses Fixpunktes in S , folgt $\tilde{z} = z$ und damit $\tilde{y} = y$, die Eindeutigkeit von y .

Im zweiten Schritt des Beweises zeigen wir die Existenz und Eindeutigkeit einer stetigen Funktion $y: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto y(t)$, die Gleichung (3.6) erfüllt und der Anfangsbedingung $y_{t_0} = \phi$ genügt.

Zunächst stellen wir fest, daß b_0 unabhängig vom Anfangswert (t_0, ϕ) ist. Wenn wir ein neues Anfangswertproblem mit dem Anfangswert $(t_0+b_0, y_{t_0+b_0}) \in \mathbb{R} \times C$ betrachten, so können wir

nach geeigneter Wahl eines $k_1(y_{t_0+b_0}, M_1)$, $M_1 \in \mathbb{R}^+$ und einer Menge S_1 aus $C([-1+t_0+b_0, t_0+2b_0], \mathbb{R})$ durch analoges Vorgehen wie im Existenzbeweis des ersten Schrittes eine eindeutig bestimmte stetige Funktion $y_1 \in C([-1+t_0+b_0, t_0+2b_0], \mathbb{R})$ finden, die (3.6) auf (t_0+b_0, t_0+2b_0) erfüllt und auf dem Intervall $[-1+t_0+b_0, t_0+b_0]$ mit y übereinstimmt. Setzen wir y mit y_1 stetig auf $[-1+t_0, t_0+2b_0]$ fort, so erfüllt diese Fortsetzung wegen der Stetigkeit von D , F und y (3.6) auf (t_0, t_0+2b_0) , und es ist $y_{t_0} = \phi$.

Durch beliebige Wiederholung dieses Verfahrens erhalten wir so eine eindeutig bestimmte stetige Funktion, die der Gleichung (3.6) für $t > t_0$ und der geforderten Anfangsbedingung bezüglich ϕ genügt.

Im dritten Schritt betrachten wir eine weitere Funktional-Differentialgleichung

$$(3.7) \quad \frac{d}{dt} \tilde{D}(t, y_t) = \tilde{F}(t, y_t) .$$

um eine Funktion zu finden, die Gleichung (3.6) für $t < t_0$ erfüllt und für die wieder $y_{t_0} = \phi$ gilt.

Dabei ist

$$\tilde{D}: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R} , (t, \phi) \mapsto \phi(0) - \frac{1}{a} \cdot \phi(-1) + \frac{1}{a} \cdot g(-t, h_3 \phi) ,$$

$$\tilde{F}: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R} , (t, \phi) \mapsto \frac{1}{a} \cdot f(-t, h_3 \phi) ;$$

$h_3 \in B_0$ ist gegeben durch

$$h_3: C \rightarrow C, \phi \mapsto h_3 \phi, h_3 \phi(\theta) := \phi(-1-\theta), \theta \in [-1, 0] .$$

Es ist $h_3 h_3 \phi = \phi$, $|h_3 \phi| = |\phi|$.

Nun gelten für alle $(t, \phi), (t, \psi) \in \mathbb{R} \times C$ die Abschätzungen

$$| \frac{1}{a} \cdot f(-t, h_3 \phi) - \frac{1}{a} \cdot f(-t, h_3 \psi) | \leq \tilde{L} \cdot |\phi - \psi| ,$$

$$(3.8) \quad | -\frac{1}{a} \cdot g(-t, h_3 \phi) + \frac{1}{a} \cdot g(-t, h_3 \psi) | \leq \tilde{q} \cdot |\phi - \psi| ,$$

$$| \frac{1}{a} \cdot f(-t, h_3 \phi) | \leq \tilde{I}_0 + \tilde{L} |\phi| , | -\frac{1}{a} \cdot g(-t, h_3 \phi) | \leq \tilde{I}_0 + \tilde{q} |\phi|$$

mit $\tilde{I}_0 := a_0 \cdot l_0$, $\tilde{q} := a_0 \cdot q \in [0, 1)$, $\tilde{L} := a_0 \cdot L$.

Die Abschätzungen in (3.8) entsprechen denen in (3.4), denn $a_0 \cdot q < 1$. Wir können deshalb analog, wie für die Gleichung (3.6), auch für Gleichung (3.7) zeigen:

Es gibt zum Anfangswert $(-t_0, h_3 \phi) \in \mathbb{R} \times C$ eine eindeutig bestimmte Funktion $x: [-1-t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die (3.7) für $t \in \mathbb{R}$, $t > -t_0$ erfüllt und auf $[-1-t_0, -t_0]$ mit $h_3 \phi$ übereinstimmt.

Betrachten wir die Funktion

$$v: (-\infty, t_0] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto v(t) := x(-t-1),$$

dann gilt für $\theta \in [-1, 0]$, $t \leq t_0$

$$v_t(\theta) = v(t+\theta) = x(-t-\theta-1) = x_{-t}(-1-\theta) = h_3 x_{-t}(\theta).$$

x_s erfüllt aber (3.7) für $s > -t_0$.

Damit ergibt sich mit der Substitution $-t = s$

$$\frac{d}{ds} \tilde{D}(s, x_s) = \tilde{F}(s, x_s), \quad s > -t_0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{D}(-t, h_3 v_t) = -\tilde{F}(-t, h_3 v_t), \quad t < t_0.$$

Weiter gilt:

$$\tilde{D}(-t, h_3 v_t) = v(t-1) - \frac{1}{a} \cdot v(t) + \frac{1}{a} \cdot g(t, v_t) = -\frac{1}{a} \cdot D(t, v_t),$$

$$\tilde{F}(-t, h_3 v_t) = \frac{1}{a} \cdot f(t, v_t) = \frac{1}{a} \cdot F(t, v_t),$$

und das zeigt $\frac{d}{dt} D(t, v_t) = F(t, v_t)$ für $t < t_0$.

Damit erfüllt v (3.6) auf dem Intervall $(-\infty, t_0)$. Weiter ist $v_{t_0} = h_3 x_{-t_0} = \phi$, und v genügt der geforderten Anfangsbedingung.

Mit der Eindeutigkeit von x folgt die Eindeutigkeit von v . Setzen wir y mit v auf $\mathbb{R}$ stetig fort, so liefert diese auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion mit der Stetigkeit von D und F eine eindeutig bestimmte Lösung zum Anfangswert (t_0, ϕ) .

Damit ist der Satz bewiesen.

◇

3.1.6 Bemerkung

Seien $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1$ und die Funktionen $x, y: [t_0-1, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

Erfüllen x und y die Gleichung (3.6), und gilt $x_{t_0} = y_{t_0}$, dann sind x und y identisch. Dies ist aus dem Beweis von Satz 3.1.5 sofort klar.

□

Im nächsten Satz soll das Wachstumsverhalten der Lösungen der Gleichung (3.6) untersucht werden, wenn f und g von Parametern $(a, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{B}_p$ abhängen.

3.1.7 Satz (exponentielles Wachstum der Lösungen)

Gegeben sei ein beschränktes offenes Intervall $J \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $0 \notin \text{Rd} J$. Für jedes $(a, h) \in J \times B_p$, $p \in \mathbb{R}^+$ seien folgende Abbildungen gegeben:

$$f(a, \cdot, \cdot, h): \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}, (t, \phi) \mapsto f(a, t, \phi, h),$$

$$g(a, \cdot, \cdot, h): \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}, (t, \phi) \mapsto g(a, t, \phi, h);$$

es gebe Konstanten $q \in [0, 1]$, $L \in \mathbb{R}^+$, $L \geq q$ und $l_0 \in \mathbb{R}_0^+$, so daß für alle (a_1, t, ϕ, h_1) , $(a_2, t, \psi, h_2) \in J \times \mathbb{R} \times C \times B_p$ die folgenden Ungleichungen gelten:

(3.9a)

$$|f(a_1, t, \phi, h_1) - f(a_2, t, \psi, h_2)| \leq$$

$$[l_0 + L \cdot \min\{|\phi|, |\psi|\}] \cdot (|a_1 - a_2| + |h_1 - h_2|) + L \cdot |\phi - \psi|,$$

$$|g(a_1, t, \phi, h_1) - g(a_2, t, \psi, h_2)| \leq$$

$$[l_0 + q \cdot \min\{|\phi|, |\psi|\}] \cdot (|a_1 - a_2| + |h_1 - h_2|) + q \cdot |\phi - \psi|,$$

$$|f(a_1, t, \phi, h_1)| \leq l_0 + L|\phi|, \quad |g(a_1, t, \phi, h_1)| \leq l_0 + q|\phi|;$$

(3.9b) $a_0 \cdot q < 1$

mit $a_0 := \sup\{c \in \mathbb{R}^+ \mid c = |a| + 1 \text{ oder } c = \frac{1}{|a|} \text{ für ein } a \in J\}$.

Dann gibt es Konstanten $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$, so daß gilt:

Ist $(a_1, h_1) \in J \times B_p$ und $x = x(\cdot, \phi)$ eine Lösung der Gleichung

$$(3.10) \quad \frac{d}{dt}[x_t(0) - a_1 \cdot x_t(-1) - g(a_1, t, x_t, h_1)] = f(a_1, t, x_t, h_1)$$

zum Anfangswert $(t_0, \phi) \in \mathbb{R} \times C$, und ist $(a_2, h_2) \in J \times B_p$ und $y = y(\cdot, \psi)$ eine Lösung der Gleichung

$$(3.11) \quad \frac{d}{dt}[y_t(0) - a_2 \cdot y_t(-1) - g(a_2, t, y_t, h_2)] = f(a_2, t, y_t, h_2)$$

zum Anfangswert $(t_0, \psi) \in \mathbb{R} \times C$, dann genügen x und y für alle $t \in \mathbb{R}$ den Abschätzungen

$$a) \quad |x_t| \leq k_1 \cdot (1_0 + |\phi|) \cdot e^{k_2 \cdot |t - t_0|};$$

$$b) \quad |x_t - y_t| \leq$$

$$\leq k_1 [(1_0 + \min\{|\phi|, |\psi|\})(|a_1 - a_2| + |h_1 - h_2|) + |\phi - \psi|] e^{k_2 |t - t_0|}.$$

Beweis:

Den Beweis führen wir in drei Schritten. Im ersten und zweiten Schritt zeigen wir a) und b) mit der Einschränkung $t \geq t_0$. Im dritten Schritt wird diese Einschränkung beseitigt.

Sei $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$k_1 := \max\{(2 \cdot a_0 + 1 + q)/(1-q), 3/(1-q)\}, \quad k_2 := \max\{1, L/(1-q)\};$$

(1) Durch Integration von (3.10) für $t \in [t_0, t_0+1]$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x(t) = & a_1 \cdot x(t-1) + \Phi(0) - a_1 \cdot \Phi(-1) + \int_{t_0}^t f(a_1, t, x_s, h_1) ds + \\ & + g(a_1, t, x_t, h_1) - g(a_1, t_0, \Phi, h_1); \end{aligned}$$

unter Benutzung der Abschätzungen (3.9a) für f und g ergibt sich

$$|x(t)| \leq (2a_0 + 1 + q)|\Phi| + 3l_0 + q|x_t| + L \int_{t_0}^t |x_s| ds =: RS(t).$$

Wir zeigen: $|x(\tau)| \leq RS(\tau)$ für alle $\tau \in [t-1, t]$.

Für $\tau \in [t_0, t]$ gilt stets $|x(\tau)| \leq |x_\tau| \leq \max\{|\Phi|, |x_t|\}$.

1. Fall $|x_\tau| \leq |\Phi|$: dann ist nichts zu zeigen.

2. Fall $|x_\tau| \leq |x_t|$: dann folgt $|x(\tau)| \leq RS(\tau) \leq RS(t)$.

Für $\tau \in [t-1, t_0]$ gilt stets $|x(\tau)| \leq |\Phi|$.

Damit folgt $|x_t| \leq RS(t)$ für $t \in [t_0, t_0+1]$.

Wir erhalten deshalb mit dem Lemma von Gronwall für $t \in [t_0, t_0+1]$

$$(3.12) \quad |x_t| \leq k_1 \cdot (l_0 + |\Phi|) \cdot e^{k_2(t-t_0)}.$$

Ebenso folgt für $t_n := t_0 + n$, $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in [t_n, t_{n+1}]$

$$(3.13) \quad |x_t| \leq k_1 \cdot (l_0 + |x_{t_n}|) \cdot e^{k_2(t-t_n)}.$$

Mit Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$ zeigen wir:

Für $t \in [t_n, t_{n+1}]$ gilt

$$|x_t| \leq k_1^{n+1} (1_0 \cdot S_n + |\phi|) e^{k_2(t-t_0)}, \quad S_n := \sum_{j=0}^n (k_1 e^{k_2})^{-j}.$$

Die Behauptung für $n=0$ ist gerade (3.12).

Sei $n \geq 1$, $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Dann ist mit (3.13)

$$|x_t| \leq k_1 (1_0 + |x_{t_n}|) e^{k_2(t-t_n)}$$

und der Induktionsvoraussetzung

$$|x_{t_n}| \leq k_1^n (1_0 \cdot S_{n-1} + |\phi|) e^{k_2 t_n};$$

eine Kombination dieser beiden Abschätzungen liefert

$$\begin{aligned} |x_t| &\leq k_1 \{1_0 + k_1^n (1_0 \cdot S_{n-1} + |\phi|) e^{k_2 t_n}\} e^{-k_2 t_n} e^{(t-t_0)k_2} = \\ &= k_1^{n+1} (1_0 \cdot S_n + |\phi|) e^{(t-t_0)k_2}. \end{aligned}$$

Weiter ist für $t \in [t_n, t_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}_0$, $t-t_0 \geq n$.

Damit wird $k_1^n \leq e^{(t-t_0)\ln(k_1)}$. $k_1 \cdot S_n$ ist beschränkt für alle $n \in \mathbb{N}$, etwa $k_1 \cdot S_n < k_3 \in \mathbb{R}^+$ mit $k_3 \geq k_1$. Mit $k_4 := k_2 + \ln(k_1) > k_2$ erhalten wir damit

$$|x_t| \leq k_3 (1_0 + |\phi|) e^{(t-t_0) \cdot k_4}.$$

(2) Durch Integration von (3.10) und (3.11) ergibt sich für $t \in [t_n, t_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}_0$:

$$x(t) - y(t) =$$

$$\begin{aligned} &a_1 x(t-1) + g(a_1, t, x_t, h_1) + x(t_n) - a_1 x(t_n-1) - g(a_1, t_n, x_{t_n}, h_1) + \\ &\quad + \int_{t_n}^t f(a_1, s, x_s, h_1) ds - \\ &- [a_2 y(t-1) + g(a_2, t, y_t, h_2) + y(t_n) - a_2 y(t_n-1) - g(a_2, t_n, y_{t_n}, h_2) + \\ &\quad + \int_{t_n}^t f(a_2, s, y_s, h_2) ds]. \end{aligned}$$

Die Abschätzungen (3.9) für f und g liefern

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| \leq & 2|a_1 - a_2||x_{t_n}| + 2|a_2||x_{t_n} - y_{t_n}| + |x_{t_n} - y_{t_n}| + \\ & 1(x_{t_n})[|a_1 - a_2| + |h_1 - h_2|] + q|x_{t_n} - y_{t_n}| + \\ & 1(x_{t_n})[|a_1 - a_2| + |h_1 - h_2|] + q|x_{t_n} - y_{t_n}| + \\ & + \int_{t_n}^t (1_0 + L|x_s|)[|a_1 - a_2| + |h_1 - h_2|] + L|x_s - y_s| ds \end{aligned}$$

mit $1(\phi) := 1_0 + L \cdot |\phi|$ für $\phi \in C$; weiter folgt

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| \leq & (2a_0 + q + 1)|x_{t_n} - y_{t_n}| + \\ & + \{(2/L + 1) \cdot 1(x_{t_n}) + 1(x_t) + \int_{t_n}^t 1(x_s) ds\}[|a_1 - a_2| + |h_1 - h_2|] + \\ & + q|x_{t_n} - y_{t_n}| + L \cdot \int_{t_n}^t |x_s - y_s| ds ; \end{aligned}$$

(3.13) liefert nun

$$\begin{aligned} 1(x_t) = 1_0 + L \cdot |x_t| \leq & \\ \leq 1_0 + L[k_1 e^{k_2(t-t_n)}(1_0 + |x_{t_n}|)] \leq (1 + Lk_1)e^{k_2(1_0 + |x_{t_n}|)} ; \end{aligned}$$

wir erhalten damit

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| \leq & (2a_0 + q + 1)|x_{t_n} - y_{t_n}| + q|x_{t_n} - y_{t_n}| + \\ & + (2/L + 3) \cdot (1 + Lk_1)e^{k_2(1_0 + |x_{t_n}|)} \cdot [|a_1 - a_2| + |h_1 - h_2|] + \\ & + L \int_{t_n}^t |x_s - y_s| ds =: RS_1(t) . \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß für $t \in [t_n, t_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $|x_t - y_t| \leq RS_1(t)$.

(i) Für $\tau \in [t-1, t_n]$ erhalten wir

$$|x(\tau) - y(\tau)| \leq |x_{t_n} - y_{t_n}| \leq RS_1(t) .$$

(ii) Für $\tau \in [t_n, t]$ gilt

$$|x(\tau) - y(\tau)| \leq |x_\tau - y_\tau| \leq \max\{|x_{t_n} - y_{t_n}|, |x_t - y_t|\} .$$

Für $|x_\tau - y_\tau| \leq |x_{t_n} - y_{t_n}|$ ist nichts zu zeigen;

für $|x_\tau - y_\tau| \leq |x_t - y_t|$ folgt $|x(\tau) - y(\tau)| \leq RS_1(\tau) \leq RS_1(t)$.

Insgesamt gilt also $|x_t - y_t| \leq RS_1(t)$ für alle $t \in [t_n, t_{n+1}]$.

Setzen wir $k_5 := \max\{k_3, (3 + 2/L) \cdot (1 + Lk_1)e^{k_2/(1-q)}\}$, so erhalten wir wieder mit dem Lemma von Gronwall

$$|x_t - y_t| \leq k_5 \{|x_{t_n} - y_{t_n}| + (1_0 + |x_{t_n}|)[|a_1 - a_2| + |h_1 - h_2|]\} e^{k_2(t-t_n)}$$

für $t \in [t_n, t_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}_0$;

daraus folgt mit $k_7 := k_5 e^{k_4}$

$$|x_{t_{n+1}} - y_{t_{n+1}}| \leq k_7 \{|x_{t_n} - y_{t_n}| + (1_0 + |x_{t_n}|)[|a_1 - a_2| + |h_1 - h_2|]\}.$$

Durch schrittweises Einsetzen ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} |x_{t_{n+1}} - y_{t_{n+1}}| &\leq k_7 \{|x_{t_n} - y_{t_n}| + (1_0 + |x_{t_n}|)[|a_1 - a_2| + |h_1 - h_2|]\} \leq \\ &\leq k_7 \{k_7^n |\phi - \psi| + \tilde{S}_n [|a_1 - a_2| + |h_1 - h_2|]\} \end{aligned}$$

mit $\tilde{S}_n := \sum_{i=0}^n k_7^i (1_0 + |x_{t_{n-i}}|)$.

Nach (1) gilt für $j \in \mathbb{N}_0$

$$|x_{t_j}| \leq k_3 e^{j \cdot k_4} (1_0 + |\phi|) \leq k_5 \cdot k_5^{-j} \cdot k_7^j (|\phi| + 1_0).$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n &\leq \sum_{i=0}^n k_7^i (1_0 + k_5 \cdot k_5^{i-n} \cdot k_7^{n-i} (1_0 + |\phi|)) \leq \\ &\leq k_7^n \cdot \sum_{i=0}^n 2k_5 \cdot k_5^{i-n} \cdot (1_0 + |\phi|) ; \end{aligned}$$

das zeigt, daß es eine Konstante k_8 gibt, so daß für alle $t \in [t_n, t_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$|x_t - y_t| \leq k_8 \cdot k_7^{n+1} \{(1_0 + |\phi|)[|a_1 - a_2| + |h_1 - h_2|] + |\phi - \psi|\}.$$

Damit sieht man leicht, daß es eine Konstante k_9 gibt, so daß die Abschätzung

$$|x_t - y_t| \leq k_8 \{(1_0 + |\phi|)[|a_1 - a_2| + |h_1 - h_2|] + |\phi - \psi|\} e^{k_9(t-t_0)}$$

für alle $t \geq t_0$ gilt.

(3) Sind $\tilde{D}_i, \tilde{F}_i: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{D}_i(t, \phi) := \phi(0) - \frac{1}{a_i} [\phi(-1) - g(a_i, -t, h_3 \phi, h_i)]$$

$$\tilde{F}_i(t, \phi) := \frac{1}{a_i} f(a_i, -t, h_3 \phi, h_i)$$

für $i=1,2$ gegeben, dann wissen wir aus dem Beweis von Satz 3.1.5, daß sich für $t \leq t_0$ die Lösung x der Gleichung (3.10) durch eine Lösung u der Gleichung

$$\frac{d}{dt} \tilde{D}_1(t, y_t) = \tilde{F}_1(t, y_t)$$

ausdrücken läßt.

Ebenso kann man die Lösung y der Gleichung (3.11) mit einer Lösung v der Gleichung

$$\frac{d}{dt} \tilde{D}_2(t, y_t) = \tilde{F}_2(t, y_t)$$

für $t \leq t_0$ darstellen.

Es gilt: $h_3 x_t(\phi) = u_{-t}(h_3 \phi)$, $h_3 y_t(\psi) = v_{-t}(h_3 \psi)$.

Wir zeigen nun, daß die $\tilde{F}_i, \tilde{D}_i, i=1,2$ die (3.9a) entsprechenden Abschätzungen erfüllen.

Für alle $(a, t, \phi, h_1), (b, t, \psi, h_2) \in J \times \mathbb{R} \times C \times B_p$ gilt:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{a} f(a, -t, h_3 \phi, h_1) - \frac{1}{b} f(b, -t, h_3 \psi, h_2) \right| \leq \\ & \leq \tilde{I}(\phi) \left[\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right| + |h_1 - h_2| \right] + \tilde{L}|\phi - \psi|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3.14) \quad & \left| -\frac{1}{a} g(a, -t, h_3 \phi, h_1) + \frac{1}{b} g(b, -t, h_3 \psi, h_2) \right| \leq \\ & \leq \tilde{I}(\phi) \left[\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right| + |h_1 - h_2| \right] + \tilde{q}|\phi - \psi|, \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1}{a} f(a, -t, h_3 \phi, h_1) \right| \leq \left| \frac{1}{a} \right| \cdot l(\phi) \leq \tilde{I}(\phi),$$

$$\left| -\frac{1}{a} g(a, -t, h_3 \phi, h_1) \right| \leq \left| \frac{1}{a} \right| \cdot (l_0 + q|\phi|) \leq \tilde{I}_0 + \tilde{q}|\phi|$$

mit $\tilde{I}_0 := a_0 \cdot l_0$, $\tilde{q} := a_0 \cdot q \in [0, 1)$, $\tilde{I}(\phi) := a_0 \cdot l(\phi)$, $\tilde{L} := a_0 \cdot L$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \Delta &:= \left| \frac{1}{a} f(a, -t, h_3 \phi, h_1) - \frac{1}{b} f(b, -t, h_3 \psi, h_2) \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right| |f(a, -t, h_3 \phi, h_1)| + \\ &\quad + \left| \frac{1}{b} \right| |f(a, -t, h_3 \phi, h_1) - f(b, -t, h_3 \psi, h_2)|; \\ |f(a, -t, h_3 \phi, h_1) - f(b, -t, h_3 \psi, h_2)| &\leq \\ &\leq l(h_3 \phi) \cdot (|a-b| + |h_1-h_2|) + L|h_3 \phi - h_3 \psi|; \\ \Delta &\leq \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right| \cdot l(\phi) \cdot (1+|a|) + \left| \frac{1}{b} \right| |h_1-h_2| \cdot l(\phi) + \left| \frac{1}{b} \right| \cdot L \cdot |\phi-\psi|; \\ \left| \frac{1}{a} \cdot f(a, -t, h_3 \phi, h_1) \right| &\leq \left| \frac{1}{a} \right| l(h_3 \phi) \leq a_0 l(\phi); \end{aligned}$$

das zeigt die Abschätzungen für f ; für g erhält man sie mit analoger Rechnung.

Also gibt es, wie in (1) und (2), Konstanten $k_{10}, k_{11} \in \mathbb{R}^+$ für $-t \geq -t_0$ mit

$$\begin{aligned} |u_{-t}| &\leq k_{10} \cdot (\tilde{\gamma}_0 + |h_3 \phi|) \cdot e^{k_{11}(-t+t_0)}, \\ |u_{-t} - v_{-t}| &\leq \\ &\leq k_{10} [(\tilde{\gamma}_0 + |h_3 \phi|) \left(\left| \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right| + |h_1-h_2| \right) + |h_3 \phi - h_3 \psi|] e^{k_{11}(-t+t_0)}. \end{aligned}$$

Nun ist aber $|a_1|, |a_2| \geq \inf\{|a| \mid a \in J\} > 0$, $|h_3 \psi| = |\psi|$, $|h_3 \phi| = |\phi|$ und $|h_3 x_t - h_3 y_t| = |x_t - y_t|$, $t \leq t_0$.

Das zeigt, daß die Wahl von Konstanten, wie sie in der Behauptung des Satzes gefordert wird, möglich ist, und der Satz ist bewiesen.

◇

3.1.8 Folgerung (stetige Abhängigkeit)

Die Abbildung

$$T: J \times \mathbb{R} \times C \times B_p \rightarrow C, (a_1, t, \phi, h_1) \mapsto x_t(a_1, \phi, h_1)$$

ist für alle $p > 0$ stetig.

Beweis:

Sei (a_n, t_n, ϕ_n, h_n) , $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ eine Folge in $J \times \mathbb{R} \times C \times B_p$ mit dem Grenzwert $(a_1, t, \phi, h_1) \in J \times \mathbb{R} \times C \times B_p$. Die Abbildung

$$\text{Tr}(x)(a_1, \phi, h_1): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto x_t(a_1, \phi, h_1)$$

ist stetig, da $x(a_1, t, \phi, h_1)$ eine stetige Funktion in t ist.

Mit dieser Vorbemerkung und der Abschätzung

$$\begin{aligned} & |x_t(a_1, \phi, h) - x_{t_n}(a_n, \phi_n, h_n)| \leq \\ & \leq |x_t(a_1, \phi, h_1) - x_{t_n}(a_1, \phi, h_1)| + |x_{t_n}(a_1, \phi, h_1) - x_{t_n}(a_n, \phi_n, h_n)| \end{aligned}$$

ist die Behauptung der Folgerung mit Satz 3.1.7 klar.

◇

Nach diesen grundlegenden Überlegungen wollen wir im nächsten Abschnitt die linearen Funktional-Differentialgleichungen untersuchen.

3.2 Die lineare Funktional-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}[y(t) - a(y(t-1) + g(t))] = a[by(t) + cy(t-1) + f(t)]$$

Ziel dieses Abschnittes ist es, Ergebnisse über lineare Funktional-Differentialgleichungen für die weiteren Untersuchungen bereitzustellen.

Die zu Beginn dargestellten Resultate über autonome lineare Funktional-Differentialgleichungen stammen aus den Arbeiten [21] und [24].

Beide Arbeiten diskutieren die linearen autonomen Funktional-Differentialgleichungen mit Hilfe der Theorie stark stetiger Halbgruppen (vgl. [25]).

In [21] wird gezeigt, daß sich der Phasenraum C als direkte Summe von zwei Teilräumen darstellen läßt. Diese Teilräume sind invariant unter den Lösungsoperatoren der Funktional-Differentialgleichungen. In [21] wird außerdem eine Charakterisierung dieser Teilräume mit einer geeigneten Bilinearform erreicht.

Henry benutzt in [24] ebenfalls die Zerlegung aus [21]. Er charakterisiert die Teilräume mit Spektralprojektionen. Dies ermöglicht Abschätzungen der Spektralradien der Lösungsoperatoren auf den Teilräumen.

In Satz 3.2.1 fassen wir diese Ergebnisse aus den beiden Arbeiten zusammen und verknüpfen sie in Satz 3.2.2 in einer für unsere Zwecke brauchbaren Weise.

Die Aussagen über die inhomogenen linearen Funktional-Differentialgleichungen sowie die Abschätzungen für das Wachstum der Lösungen finden sich in ähnlicher Form in [17], [21] und [24].

Die Beweise für die Darstellung der Lösungen der inhomogenen Funktional-Differentialgleichungen in [24] und [21] gelten für eine große Klasse von Gleichungen. Es werden entsprechend tiefliegende Hilfsmittel zum Beweis verwendet. Der Beweis, den wir für die Darstellung geben, ist einfacher und eine natürliche Erweiterung eines Beweises den Hale in [17] S.21ff für retardierte Gleichungen gibt.

Den Satz über das Wachstumsverhalten der Lösungen führen wir hier nochmals aus, um die Abhängigkeit der Abschätzungen von Parametern in einer für unsere Zwecke befriedigenden Weise abzuklären. Wir werden zeigen, daß die Abschätzungen für Lösungen gewisser Gleichungen lokal gleichmäßig sind. Dies ist ein Punkt, der in [17] und [24] an entsprechender Stelle offen bleibt.

3.2.1 Satz

Gegeben seien $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ und die Abbildungen

$$D^0: C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto D^0(\phi) := \phi(0) - a\phi(-1),$$

$$F^0: C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto F^0(\phi) := a[b\phi(0) + c\phi(-1)].$$

Dann gilt:

(1) Zu jedem Anfangswert $(0, \phi) \in \mathbb{R} \times C$ gibt es genau eine Lösung $y^0 = y^0(\cdot, \phi)$ der Gleichung

$$(3.15) \quad \frac{d}{dt} D^0(y_t) = F^0(y_t).$$

Für $t \geq 0$ bilden die Lösungsoperatoren $T^0(t): C \rightarrow C$, $\phi \mapsto y_t^0(\phi)$ eine stark stetige Halbgruppe beschränkter linearer Operatoren.

(2) Der infinitesimale Generator G der Halbgruppe $\{T^0(t) | t \geq 0\}$ und sein Definitionsbereich $\text{DEF}(G)$ sind durch

$$\text{DEF}(G) = \{\phi \in C \mid \dot{\phi} \in C, D^0 \dot{\phi} = F^0 \phi\},$$

$$G: \text{DEF}(G) \rightarrow C, \quad \phi \mapsto G\phi, \quad G\phi(\theta) := \frac{d}{d\theta} \phi(\theta) = \dot{\phi}(\theta), \quad \theta \in [-1, 0]$$

gegeben;

$\text{DEF}(G)$ ist dicht in C , und für $\phi \in \text{DEF}(G)$, $t \geq 0$ gilt

$$T^0(t)G\phi = \frac{d}{dt} T^0(t)\phi = GT^0(t)\phi.$$

(3) Das Spektrum $S(G)$ von G ist bereits durch das Punktspektrum $PS(G)$ von G gegeben.

Mit $\phi_\omega : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{C}$, $\theta \mapsto \phi_\omega(\theta) := e^{\omega\theta}$ gilt:

$$\begin{aligned} S(G) = PS(G) &= \{\omega \in \mathbb{C} \mid \omega D^0(\phi_\omega) - F^0(\phi_\omega) = 0\} = \\ &= \{\omega \in \mathbb{C} \mid \omega(1 - ae^{-\omega}) - a(b + ce^{-\omega}) = 0\}. \end{aligned}$$

Die Realteile der Nullstellen der Funktion

$$\Delta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \Delta(z) := z(1 - ae^{-z}) - a(b + ce^{-z})$$

sind nach oben beschränkt.

Für $\omega \in S(G)$ ist der verallgemeinerte Eigenraum $M_\omega(G)$ endlichdimensional.

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $N(G - \omega \text{id}_C)^n$ den Kern des Operators $(G - \omega \text{id}_C)^n$ im Definitionsbereich von $(G - \omega \text{id}_C)^n$.

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $R(G - \omega \text{id}_C)^n$ das Bild des Definitionsbereiches unter dem Operator $(G - \omega \text{id}_C)^n$ in C .

Ist $k \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft $N(G - \omega \text{id}_C)^k = N(G - \omega \text{id}_C)^{k+1}$, dann ist $M_\omega(G) = N(G - \omega \text{id}_C)^k$, und C ist in die direkte Summe zweier Teilräume zerlegbar.

$$C = N(G - \omega \text{id}_C)^k \oplus R(G - \omega \text{id}_C)^k$$

Die Teilräume sind invariant unter den Operatoren $T^0(t), t \geq 0$.

$$T^0(t)N(G - \omega \text{id}_C)^k \subset N(G - \omega \text{id}_C)^k, \quad T^0(t)R(G - \omega \text{id}_C)^k \subset R(G - \omega \text{id}_C)^k$$

Ist $\omega \in \mathbb{C}$ ein isolierter Punkt in $S(G)$, R der Rand eines Kreises K in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt ω , und gilt $\text{cl}(K) \cap S(G) = \{\omega\}$, dann ist

$$\int_R (G - z \cdot \text{id}_C)^{-1} dz$$

das Kurvenintegral über $(G - z \text{id}_C)^{-1}$ entlang des Randes R .

$E_\omega := \frac{1}{2\pi i} \int_R (G - z \operatorname{id}_C)^{-1} dz$ existiert und heißt der Spektraloperator zu ω . Es gilt:

$$E_\omega C = N(G - \omega \operatorname{id}_C)^k \text{ und } (\operatorname{id}_C - E_\omega)C = R(G - \omega \operatorname{id}_C)^k.$$

(4) Ist $\omega \in \mathbb{C}$ von Δ eine Nullstelle erster Ordnung, dann ist

$$E_\omega \phi(\theta) = e^{\omega \theta} [D^0 \phi + a(\omega + c) \int_{-1}^0 e^{-\omega(1+s)} \phi(s) ds] / (\frac{d}{dz} \Delta(\omega)),$$

für $\theta \in [-1, 0]$, und es ist $M_\omega(G) = N(G - \omega \operatorname{id}_C)$.

(5) Für das Spektrum $S(T^0(t))$, $t \geq 0$ gilt:

$$S(T^0(t)) \subset \{0\} \cup \{\omega \in \mathbb{C} \mid \omega \in \mathbb{C}, \Delta(\omega) = 0\} \cup \{\omega \in \mathbb{C} \mid |\omega| = e^{\ln(|a|)t}\}.$$

(6) Ist $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \operatorname{cl}(\operatorname{Re}(S(G)))$, dann läßt sich C in zwei abgeschlossene Teilräume zerlegen, die unter $T^0(t)$, $t \geq 0$ invariant sind.

$$C = P \oplus Q, \quad P = \operatorname{cl}(\operatorname{span}\{M_\omega(G) \mid \omega \in S(G), \operatorname{Re}(\omega) > \alpha\}),$$

$$Q = \{\phi \in C \mid E_\omega \phi = 0 \text{ für alle } \omega \in S(G), \operatorname{Re}(\omega) > \alpha\}.$$

Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^+$, so daß für das Spektrum der induzierten Abbildungen

$$T^0(t)|_Q: Q \rightarrow Q, \quad T^0(t)|_P: P \rightarrow P, \quad t \geq 0$$

gilt:

$$S(T^0(t)|_Q) \subset \{\omega \in \mathbb{C} \mid |\omega| \leq e^{(\alpha-d)t}\},$$

$$S(T^0(t)|_P) \subset \{\omega \in \mathbb{C} \mid |\omega| \geq e^{(\alpha+d)t}\} \text{ und}$$

$$S(T^0(t)|_Q) \cup S(T^0(t)|_P) = S(T^0(t)), \text{ für alle } t \geq 0.$$

Beweis:

(1) Die Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung folgt aus Satz 3.1.5. Der Rest von (1) folgt aus Lemma 1 in [21] S.15.

(2) ist Lemma 2 aus [21] S.15, und (3) folgt aus Theorem 1 aus [21] S.17 und Theorem 5.8-A [34] S.306.

(4a) Bevor wir die Behauptung von (4) zeigen, stellen wir einige Ergebnisse über die formal adjungierte Gleichung zusammen. Der Begriff der formal adjungierten Gleichung ist in allgemeinerer Form für Funktional-Differentialgleichungen in [21] S.22ff oder [17] definiert. Als formal adjungierte Gleichung zu (3.15) bezeichnen wir in Übereinstimmung mit der Definition aus [21] die Gleichung

$$(3.16) \quad \frac{d}{dt}[y(t) - ay(t+1)] = -a[by(t) + cy(t+1)] .$$

C^+ bezeichne den Banach-Raum der stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{K}$.

Eine Lösung von (3.16) zu einem Anfangswert $\psi \in C^+$ ist eine stetige Funktion $y: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{K}$, die für $t < 0$ (3.16) erfüllt und auf $[0,1]$ mit ψ übereinstimmt.

Nach [21] S.22ff gilt:

Durch die Lösungen der Gleichung (3.16) ist eine stark stetige Halbgruppe beschränkter linearer Operatoren mit einem infinitesimalen Generator G^+ gegeben.

Ist ψ aus dem Definitionsbereich von G^+ , dann ist $G^+\psi = \dot{\psi}$.

Mit Lemma 4 und 5 aus [21] S.24ff folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\dim N(G - \omega \text{id}_C)^k = \dim N(G^+ - \omega \text{id}_C)^k, \quad S(G) = S(G^+).$$

Um die Räume $N(G - \omega \text{id}_C)^k$ und $R(G - \omega \text{id}_C)^k$ weiter zu charakterisieren, wird in [21] S.22 eine Bilinearform $(\cdot, \cdot)$ verwendet, die in unserem Fall für $\psi \in \text{DEF}(G^+)$ und $\phi \in C$ liefert:

$$\begin{aligned} (\psi, \phi) = & \psi(0)[\phi(0) - a\phi(-1) - a \int_{-1}^0 \dot{\psi}(s+1)\phi(s)ds] + \\ & + a \int_{-1}^0 \dot{\psi}(s+1)\phi(s)ds. \end{aligned}$$

Unter Benutzung dieser Bilinearform ist folgende Charakterisierung der Teilräume möglich.

Theorem 2 aus [21] S.28

Für $\omega \in S(G) = S(G^+)$ sei $\tilde{\Psi}_\omega = (\psi_1, \dots, \psi_r)'$, $r \in \mathbb{N}$ eine Basis von $M_\omega(G^+)$, und $\tilde{\Phi}_\omega = (\phi_1, \dots, \phi_r)$ sei eine Basis von $M_\omega(G)$. $(\tilde{\Psi}_\omega, \tilde{\Phi}_\omega) \in M_{r,r}$ ist die durch $(\psi_i, \phi_j)_{1 \leq i, j \leq r}$ gegebene Matrix. Dann ist $(\tilde{\Psi}_\omega, \tilde{\Phi}_\omega)$ nicht singulär und kann ohne Einschränkung als Einheitsmatrix angenommen werden. Es gilt:

$$N(G - \omega \cdot \text{id}_C)^k = \{\phi \in C \mid \phi = \tilde{\Phi}_\omega(\tilde{\Psi}_\omega, \phi)\} ,$$

$$R(G - \omega \cdot \text{id}_C)^k = \{\phi \in C \mid (\tilde{\Psi}_\omega, \phi) = 0\} .$$

(4b) Als nächstes zeigen wir, daß für eine Nullstelle ω erster Ordnung von Δ gilt: $M_\omega = N(G - \omega \cdot \text{id}_C)$.

Mit (3) genügt es $N(G - \omega \cdot \text{id}_C) = N(G - \omega \cdot \text{id}_C)^2$ zu zeigen.

(i) Da $\Delta(\omega) = 0$ ist, ist die Funktion

$$\phi_\omega: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{C} , \theta \mapsto \phi_\omega(\theta) := e^{\omega\theta}$$

aus dem Definitionsbereich von G . Offenbar gilt

$$(G - \omega \cdot \text{id}_C)c_1\phi_\omega = 0 \text{ für alle } c_1 \in \mathbb{C} .$$

Damit ist $\{c_1\phi_\omega \mid c_1 \in \mathbb{C}\} \subset N(G - \omega \cdot \text{id}_C)$. Andererseits gilt für $\psi \in N(G - \omega \cdot \text{id}_C)$ die Differentialgleichung $\frac{d}{d\theta}\psi - \omega\psi = 0$, und deshalb ist $\psi = c_0\phi_\omega$ mit $c_0 \in \mathbb{C}$.

Das zeigt $N(G - \omega \cdot \text{id}_C) = \{c_1\phi_\omega \mid c_1 \in \mathbb{C}\}$.

(ii) Für $\psi \in N(G - \omega \cdot \text{id}_C)^2$ gilt die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d}{d\theta} - \omega \cdot \text{id}_C\right)^2 \psi = 0 .$$

Also hat ψ die Darstellung

$$\psi(\theta) = c_1 \cdot \phi_\omega(\theta) + c_2 \cdot \theta \cdot \phi_\omega(\theta) , \theta \in [-1, 0] \text{ und } c_1, c_2 \in \mathbb{C} .$$

Außerdem sind ψ und $(G - \omega \cdot \text{id}_C)\psi$ notwendigerweise aus dem Definitionsbereich von G . Deshalb gilt $D^0\psi = F^0\psi$.

Mit $D^0(\phi_\omega) = F^0(\phi_\omega)$ erhalten wir

$$c_2[1 - ae^{-\omega} + a(\omega + c)e^{-\omega}] = 0 , c_2 \frac{d}{dz}\Delta(\omega) = 0 ;$$

Da ω eine Nullstelle von Δ der Ordnung 1 ist, folgt $c_2 = 0$.

Also gilt $\psi = c_1\phi_\omega$; damit ist $N(G - \omega \cdot \text{id}_C)^2 = N(G - \omega \cdot \text{id}_C)$.

Nach dem im Beweis unter (4a) gesagten ist $\dim M_\omega(G) = \dim M_\omega(G^+) = 1$. Als Basis von $M_\omega(G^+)$ erhalten wir deshalb die Funktion

$$\psi_\omega: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}, s \mapsto \psi_\omega(s) := e^{-\omega s}.$$

Als Basis von $M_\omega(G)$ wählen wir $\phi_\omega / (\frac{d}{dz}\Delta(\omega))$. Eine einfache Rechnung liefert $(\psi_\omega, \phi_\omega) = 1$.

Für die Teilräume ergibt sich

$$N(G - \omega \text{id}_C) = \{ \phi \in C \mid \phi = \phi_\omega [D^0\phi + a(\omega+c) \int_{-1}^0 e^{-\omega(1+s)} \phi(s) ds] \},$$

$$R(G - \omega \text{id}_C) = \{ \phi \in C \mid D^0\phi + a(\omega+c) \int_{-1}^0 e^{-\omega(1+s)} \phi(s) ds = 0 \}.$$

Das zeigt die Behauptung von (4).

(5) ist eine direkte Anwendung von Theorem 4.1 aus [24] S.117.

(6) folgt aus Theorem 4.2 und dessen Beweis aus [24] S.118.

◇

Der nächste Satz verbindet die Ergebnisse von Hale und Henry und zeigt weitere wichtige Abschätzungen über die Abhängigkeit der Spektralprojektoren vom Parameter a .

3.2.2 Satz

Gegeben sei ein beschränktes offenes Intervall $J \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 \notin \text{Rd}J$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Zu jedem $a \in J$ seien die Abbildungen

$$D^0(a, \cdot): C \rightarrow \mathbb{R}, \phi \mapsto D^0(a, \phi) := \phi(0) - a\phi(-1)$$

$$F^0(a, \cdot): C \rightarrow \mathbb{R}, \phi \mapsto F^0(a, \phi) := a[b\phi(0) + c\phi(-1)]$$

gegeben.

Für $a \in J$ ist $\{T^0(a, t) \mid t \geq 0\}$ die Halbgruppe der Lösungsoperatoren der Gleichung

$$\frac{d}{dt} D^0(a, y_t) = F^0(a, y_t).$$

G_a bezeichne den infinitesimalen Generator dieser Halbgruppe.

Für jedes $a \in J$ ist

$$\Delta(a, \cdot): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \Delta(a, z) := z(1 - ae^{-z}) - a(b + ce^{-z})$$

die charakteristische Funktion.

Sei $k \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{a \in J} \text{cl}(\text{Re}(S(G_a)))$ und $n \in \mathbb{N}$ fest gegeben.

Für jedes $a \in J$ sei die Menge

$$W(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a, z) = 0, \text{Re}(z) > k\}$$

durch paarweise verschiedene $\omega_1(a), \dots, \omega_n(a) \in \mathbb{C}$ gegeben;
also $W(a) = \{\omega_1(a), \dots, \omega_n(a)\}$.

Die n Funktionen

$$\omega_i: J \rightarrow \mathbb{C}, a \mapsto \omega_i(a), i=1, \dots, n$$

seien stetig differenzierbar.

Die $\omega_i(a)$, $i=1, \dots, n$ seien von $\Delta(a, \cdot)$ Nullstellen erster Ordnung.

Dann gilt:

(1) (i) Zu jedem $a \in J$ gibt es eine stetige Projektion

$$\Pi_{W(a)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \phi \mapsto \Pi_{W(a)}\phi.$$

Es gilt $\Pi_{W(a)} = \Pi_{W(a)}\Pi_{W(a)}$; durch $\Pi_{W(a)}$ und $\text{id}_{\mathbb{C}} - \Pi_{W(a)}$ wird $\mathbb{C}$ in eine direkte Summe zweier abgeschlossener Teilräume zerlegt.

$$\mathbb{C} = \Pi_{W(a)}\mathbb{C} \oplus (\text{id}_{\mathbb{C}} - \Pi_{W(a)})\mathbb{C}$$

$P := P_a := \Pi_{W(a)}\mathbb{C}$ und $Q := Q_a := (\text{id}_{\mathbb{C}} - \Pi_{W(a)})\mathbb{C}$ sind unter den Operatoren $T^0(a, t)$ für alle $t \geq 0$ invariant.

(ii) Zu jedem kompakten Intervall $J_0 \subset J$ gibt es eine Konstante $k_1 = k_1(J_0) \in \mathbb{R}^+$, so daß die linearen Abbildungen

$$\Pi_{W(a)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \phi \mapsto \Pi_{W(a)}\phi, \frac{d}{da}\Pi_{W(a)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \phi \mapsto \frac{d}{da}(\Pi_{W(a)}\phi)$$

durch k_1 für alle $a, b \in J_0$ beschränkt sind; also

$$\left| \frac{d}{da}\Pi_{W(a)} \right| \leq k_1, \quad |\Pi_{W(a)}| \leq k_1;$$

insbesondere gilt dann $|\Pi_{W(a)} - \Pi_{W(b)}| \leq k_1 |a - b|$.

(2) Die induzierten Abbildungen $T^0(a, t)|_P : P_a \rightarrow P_a$, $t \geq 0$ besitzen eine Fortsetzung für alle $t \leq 0$.

Beweis:

(1) (i) Da $k \notin \text{cl}(\text{Re}(S(G_a)))$ für alle $a \in J$ ist, erhalten wir zunächst die Zerlegung von C nach Satz 3.2.1 (6) in die Teilräume

$$P(a) = \text{cl}(\text{span}\{M_\omega(G_a) \mid \omega \in S(G_a), \text{Re}(\omega) > k\}) ,$$

$$Q(a) = \{\phi \in C \mid E_\omega \phi = 0, \text{ für alle } \omega \in S(G_a) \text{ mit } \text{Re}(\omega) > k\}.$$

Nun ist $W(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid z \in S(G_a), \text{Re}(z) > k\}$. Damit ist

$$P(a) = \text{cl}(\text{span}\{M_\omega(G_a) \mid \omega \in W(a)\}) ,$$

$$Q(a) = \{\phi \in C \mid E_\omega \phi = 0, \text{ für alle } \omega \in W(a)\}.$$

Nach Satz 3.2.1 (3) und (4) gilt

$$M_{\omega_i(a)}(G_a) = N(G_a - \omega_i(a) \cdot \text{id}_C) = E_{\omega_i(a)} C \text{ für } i=1, \dots, n.$$

$$\text{Damit ist } P(a) = \left\{ \sum_{i=1}^n \phi_i \mid \phi_i \in E_{\omega_i(a)} C, i=1, \dots, n \right\}.$$

Definieren wir mit den Spektralprojektoren E_{ω_i} folgende Projektion

$$\Pi_{W(a)}: C \rightarrow C, \phi \mapsto \Pi_{W(a)} \phi := \sum_{i=1}^n E_{\omega_i(a)} \phi ,$$

folgt die Behauptung von (1) (i).

(1) (ii) Es gilt für $\theta \in [-1, 0]$

$$\Pi_{W(a)} \phi(\theta) = \sum_{\omega \in W(a)} e^{\omega \theta} \Pi_{\omega} \phi \left(\frac{d}{dz} \Delta(\omega) \right)^{-1}$$

$$\Pi_{\omega} \phi = D^0(a, \phi) + a(c + \omega(a)) \int_{-1}^0 e^{-\omega(s)} (1+s) \phi(s) ds.$$

Für fixes $\phi \in C$, $i \in \{1, \dots, n\}$ betrachten wir die Abbildung

$$A(\phi): J \times [-1, 0] \rightarrow \mathbb{C}, (a, \theta) \mapsto e^{\omega_i(a) \theta} \Pi_{\omega_i} \phi \left[\frac{d}{dz} \Delta(a, \omega_i(a)) \right]^{-1} ;$$

$A(\phi)$ ist nach a differenzierbar, und $\frac{d}{da} A(\phi)$ ist wieder stetig auf $J \times [-1, 0]$.

Andererseits sind für festes $(a, \theta) \in J \times [-1, 0]$

$$A(\cdot)(a, \theta): C \rightarrow C, \quad \phi \mapsto A(\phi)(a, \theta)$$

$$\frac{d}{da}A(\cdot)(a, \theta): C \rightarrow C, \quad \phi \mapsto \frac{d}{da}A(\phi)(a, \theta)$$

stetige lineare Abbildungen. Mit dem Satz über die gleichmäßige Beschränktheit gibt es zu jedem kompakten Intervall $J_0 \subset J$ ein $k_1 = k_1(J_0) \in \mathbb{R}^+$ mit

$$|A(\phi)(a, \theta)| \leq k_1 |\phi|, \quad \left| \frac{d}{da}A(\phi)(a, \theta) \right| \leq k_1 |\phi|,$$

für alle $(a, \theta) \in J_0 \times [-1, 0]$.

Da $W(a)$ für jedes $a \in J$ aus genau n Elementen besteht, folgt mit einer geeigneten Konstanten $k(J_0) \in \mathbb{R}$ der erste Teil.

Weiter erhalten wir für fixes $\phi \in C$ und $a, b \in J_0$ mit dem Mittelwertsatz die Abschätzung

$$|\Pi_{W(a)}\phi - \Pi_{W(b)}\phi| \leq k \cdot |\phi| \cdot |a - b|.$$

(2) Aus dem Beweis von Satz 3.2.1 (4b) wissen wir:

$$N(G_{a-\omega_i(a)}id_C) = \{c\phi_{\omega_i(a)} \mid c \in \mathbb{C}\}.$$

Also erhalten wir

$$P(a) = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \phi_{\omega_i(a)} \mid c_i \in \mathbb{C}, i=1, \dots, n \right\}.$$

Da die Funktionen

$$x_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto e^{\omega_i(a)t} =: x_i(t), \quad i = 1, \dots, n$$

jeweils Lösungen der Gleichung $\frac{d}{dt}D^0(a, y_t) = F^0(a, y_t)$ sind, liefert

$$T^0(a, t)|_{P(a)}: P(a) \rightarrow P(a), \quad \phi = \sum_{i=1}^n c_i \phi_{\omega_i(a)} \mapsto \sum_{i=1}^n c_i \phi_{\omega_i(a)} x_i(t)$$

für $t \leq 0$ eine Fortsetzung der Halbgruppe.

◇

Bevor wir die inhomogene lineare Funktional-Differentialgleichung untersuchen können, benötigen wir eine bestimmte Funktion, die wir als Fundamentallösung bezeichnen werden.

Sei $\tilde{C}$ die Menge der beschränkten Funktionen $\phi: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$. Für $\phi \in \tilde{C}$ sei $|\phi| := \sup\{|\phi(\theta)| \mid \theta \in [-1, 0]\}$.

3.2.3 Satz (Fundamentallösung, exponentielles Wachstum)

Seien $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ und die Abbildungen

$$D^0: \tilde{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto D^0(\phi) := \phi(0) - a\phi(-1),$$

$$F^0: \tilde{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto F^0(\phi) := a(b\phi(0) + c\phi(-1))$$

gegeben.

Dann gibt es genau eine Funktion $X: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto X(t)$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für $t \geq 0$ sei $X_t(\theta) := X(t+\theta)$, $\theta \in [-1, 0]$. X erfüllt die Integralgleichung

$$(3.17) \quad D^0(y_t) = D^0(y_0) + \int_0^t F^0(y_s) ds$$

und genügt der Anfangsbedingung $X(\theta) = 0$ für $\theta \in [-1, 0)$ und $X(0) = 1$.

Die Funktion $D^0(X): \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto D^0(X_t)$ ist stetig.

Für $n \in \mathbb{R}_0$ ist X auf den Intervallen $(-1+n, n)$ stetig differenzierbar, und es existieren die Grenzwerte

$$X(n^+) := \lim_{0 < h \rightarrow 0} X(n+h), \quad X(n^-) := \lim_{0 < h \rightarrow 0} X(n-h).$$

$$\frac{d}{dt}X(n^+) := \lim_{0 < h \rightarrow 0} \frac{d}{dt}X(n+h), \quad \frac{d}{dt}X(n^-) := \lim_{0 < h \rightarrow 0} \frac{d}{dt}X(n-h).$$

$$X(n) = X(n^+), \quad X(n^+) - X(n^-) = a^n.$$

Für $t \geq 0$ ist damit $X_t \in \tilde{C}$.

Durch $\dot{X}(n) := \frac{d}{dt}X(n^+)$ ist $\dot{X}$ auf ganz $[-1, +\infty)$ definiert. Mit $\dot{X}_t(\theta) := \dot{X}(t+\theta)$ für $\theta \in [-1, 0]$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$ ist $\dot{X}_t \in \tilde{C}$.

(2) Es gibt Konstanten $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$, so daß für $t \geq 0$ gilt:

$$|X(t)| \leq k_1 \cdot e^{k_2 t}.$$

Beweis:

(1) Wir definieren X rekursiv durch

$$X(\theta) := 0 \text{ für } \theta \in [-1, 0), \quad X(0) := 1,$$

$$X(t) := aX(t-1) + k_{n+1} e^{ab(t-n)} + \int_n^t e^{ab(t-s)} a(ab+c)X(s-1)ds,$$

für $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in [n, n+1)$ mit

$$k_1 := 1, \quad k_{n+1} := X(n^-) - a \cdot X((n-1)^-) , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aus dieser Rekursion ersieht man:

X ist auf dem Intervall $(-1, 0)$ stetig differenzierbar, und es existieren die Grenzwerte $X(-1^+) = X(0^-) = 0$, $\dot{X}(-1^+) = \dot{X}(0^-) = 0$.

Mit der rekursiven Definition von X und Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$ erhalten wir die Existenz der Grenzwerte $X(n^+) = X(n)$, $X(n^-)$ und die stetige Differenzierbarkeit von X in den Intervallen $(n, n+1)$.

Für die Ableitung folgt aus der Rekursion für $t \in (n, n+1)$

$$\dot{X}(t) - a\dot{X}(t-1) = a(bX(t) + cX(t-1)).$$

Daraus ergibt sich die Existenz der Grenzwerte $\dot{X}(n^+) =: \dot{X}(n)$, $\dot{X}(n^-)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Für $t \in \mathbb{N}^+ \setminus \mathbb{N}$ ist $D^0(X_t) = X(t) - aX(t-1)$ stetig.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ folgt mit der Rekursion $X(n^+) - aX((n-1)^+) = k_{n+1}$.

Nach Definition ist aber $k_{n+1} = X(n^-) - aX((n-1)^-)$ für $n \geq 1$ und $k_1 = 1$. Das ist die Stetigkeit von $D^0(X.)$ für $t \geq 0$.

Integration der Gleichung für die Ableitung und die Stetigkeit von $D^0(X.)$ liefern die Behauptung, daß X die Integralgleichung (3.17) für $t \geq 0$ erfüllt.

Aus der Stetigkeit von $D^0(X.)$ folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$X(n^+) - a \cdot X((n-1)^+) = X(n^-) - a \cdot X((n-1)^-)$$

$$X(n^+) - X(n^-) = a \cdot [X((n-1)^+) - X((n-1)^-)]$$

Für $n=0$ ist $X(0^+) - X(0^-) = 1 = a^0$.

Mit Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ erhält man $X(n^+) - X(n^-) = a^n$.

(2) exponentielles Wachstum

Wir erhalten für $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in [-1, 0)$

$$X_n(\theta) = aX_{n-1}(\theta) + k_n e^{ab(1+\theta)} + \\ + a(ab+c) \int_0^{1+\theta} e^{ab(1+\theta-s)} X_{n-1}(s-1) ds .$$

Nun gilt $k_1=1$, und für $n \geq 2$ folgt

$$k_n = X((n-1)^-) - aX((n-2)^-) = \\ = X((n-1)^-) - a[X((n-2)^+) - a^{n-2}] = \\ = X((n-1)^-) - aX((n-2)^+) + a^{n-1} .$$

Deshalb gibt es ein $\tilde{k}_1 \in \mathbb{R}^+$, $\tilde{k}_1 > 1$ mit

$$\sup\{|X_n(\theta)| \mid \theta \in [-1, 0)\} \leq \tilde{k}_1 (|X_{n-1}| + |a|^n).$$

Nun ist $X(n) = X(n^+) = X(n^-) + a^n$. Damit wird

$$|X_n| \leq \sup\{|X_n(\theta)| \mid \theta \in [-1, 0)\} + |a|^n \leq 2\tilde{k}_1 (|X_{n-1}| + |a|^n);$$

schrittweises Einsetzen liefert für $n \geq 0$

$$|X_n| \leq (2\tilde{k}_1)^n |X_0| + \sum_{i=1}^n (2\tilde{k}_1)^{n-i+1} |a|^i;$$

ohne Einschränkung dieser Abschätzung können wir annehmen, daß $2\tilde{k}_1 > |a|$ ist. Damit ist $\sum_{i=1}^n (2\tilde{k}_1)^{-i} |a|^i$ kleiner als eine Konstante $\tilde{k}_2$, und es gibt ein $\tilde{k}_3 \in \mathbb{R}^+$, so daß $|X_n| \leq \tilde{k}_3^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgt leicht die Behauptung (2) des Satzes.

◇

Wir benötigen für die weiteren Untersuchungen einige Ergebnisse aus der Theorie der Laplace-Transformationen, die wir im folgenden zusammenstellen wollen.

3.2.4 Definition

(1) Gegeben sei eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I := [0, +\infty)$ und ein $z \in \mathbb{C}$. Existiert das uneigentliche Riemann-Integral

$$\text{Lap}(f)(z) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt := \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t)e^{-zt} dt,$$

dann heißt es Laplace-Integral.

(2) Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt lokal absolut integrierbar, wenn gilt:

a) Zu jedem endlichen Intervall $J \subset I$ gibt es endlich viele Punkte $t_k \in J \cap \mathbb{R}^d$, $k=1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ mit $t_k < t_{k+1}$, $k=1, \dots, n-1$, so daß für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ mit $0 < \tau < \frac{1}{2} \min\{t_{k+1} - t_k \mid k=1, \dots, n-1\}$ die Funktion f auf den Intervallen $[t_k + \tau, t_{k+1} - \tau] \cap J =: I_k$, $k=1, \dots, n-1$ eigentlich integrierbar ist.

b) Es existieren für $k=1, \dots, n$ die Grenzwerte

$$\lim_{0 < \epsilon \rightarrow 0} \int_{t_k + \epsilon}^{t_{k+1} + \tau} |f(t)| dt, \quad \lim_{0 < \epsilon \rightarrow 0} \int_{t_k - \tau}^{t_k - \epsilon} |f(t)| dt.$$

(Ist $t_1 \in \mathbb{R}^d$ kommt nur das erste, ist $t_n \in \mathbb{R}^d$ kommt nur das zweite Integral in Frage.)

(3) $\text{ORG}_0 := \{ f \mid f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist eine lokal absolut integrierbare Funktion, und es gibt ein } z_0 \in \mathbb{C}, \text{ so daß } \text{Lap}(f)(z_0) \text{ existiert} \};$

$\text{ORG} := \{ f \in \text{ORG}_0 \mid f \text{ ist auf jedem kompakten Teilintervall beschränkt} \}.$

(4) $\text{Lap}(f)(z)$ heißt absolut konvergent, wenn

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T |e^{-zt} f(t)| dt$$

existiert.

(5) Existiert für zwei Funktionen $f_1, f_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ das Integral

$\int_0^t f_1(s) f_2(t-s) ds$ für jedes $t \in I$, dann heißt die Funktion

$$f_1 \wedge f_2: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_0^t f_1(s) f_2(t-s) ds$$

die Faltung von f_1 und f_2 .

□

3.2.5 Satz

Geben seien $f_1, f_2 \in \text{ORG}$.

a) Die Faltung $f_1 \wedge f_2$ existiert und ist eine stetige Funktion.

b) Konvergiert $\text{Lap}(f_1)(z_0)$, $\text{Lap}(f_2)(z_0)$ absolut, dann konvergiert $\text{Lap}(f_1 \wedge f_2)(z_0)$ absolut, und es ist

$$\text{Lap}(f_1 \wedge f_2)(z) = \text{Lap}(f_1)(z) \cdot \text{Lap}(f_2)(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(z) \geq \text{Re}(z_0)$.

c) Seien $f_1, f_2 \in \text{ORG}_0$ gegeben.

Gilt $\text{Lap}(f_1)(z) = \text{Lap}(f_2)(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(z) \geq \text{Re}(z_0)$, dann ist

$$\int_0^t f_1(s) - f_2(s) ds = 0$$

für alle $t \in \mathbb{I}$.

d) Sei $f \in \text{ORG}_0$, und es existiere $F(t) := \int_0^t f(s) ds$ für alle $t \in \mathbb{I}$. Existiert $\text{Lap}(f)(z_0)$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(z_0) \geq 0$, dann existiert auch $\text{Lap}(F)(z_0)$, und es gilt

$$\text{Lap}(F)(z) = \frac{1}{z} \cdot \text{Lap}(f)(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \text{Re}(z) > \text{Re}(z_0).$$

(Beweise zu diesen Aussagen finden sich in [08].)

Mit diesen Ergebnissen können wir den nächsten Satz für die inhomogene Gleichung zeigen. Wir werden mit Hilfe der Funktion X aus Satz 3.2.3 und den Lösungen der Gleichung (3.15) eine Darstellung der Lösungen der inhomogenen Gleichung finden, wie sie in ähnlicher Weise mit der Variation der Konstanten bei gewöhnlichen Differentialgleichungen gewonnen wird.

3.2.6 Satz

Gegeben seien $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$, stetige Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und die Abbildungen

$$D^0: C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto D^0(\phi) := \phi(0) - a\phi(-1),$$

$$F^0: C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto F^0(\phi) := a[b\phi(0) + c\phi(-1)].$$

Ist $y^0 = y^0(\cdot, t_0, \phi)$ die Lösung der Gleichung

$$(3.15) \quad \frac{d}{dt} D^0(y_t) = F^0(y_t)$$

zum Anfangswert $(t_0, \phi) \in \mathbb{R} \times C$, dann gilt für die Lösung $y = y(\cdot, t_0, \phi)$ der inhomogenen Gleichung

$$(3.18) \quad \frac{d}{dt} [D^0(y_t) - g(t)] = F^0(y_t) + f(t)$$

zum Anfangswert (t_0, ϕ) die Darstellung (3.19)

$$y(t, t_0, \phi) = y^0(t, t_0, \phi) + \int_{t_0}^t X(t-s)f(s)ds + \int_{t_0}^t X(t-s)dg(s)$$

für $t \geq t_0$. Dabei ist X die Fundamentallösung von (3.15) aus Satz 3.2.3.

Beweis:

Wir führen den Beweis in vier Schritten aus.

(1) Zunächst wird die Behauptung für $t_0 = 0$, $f = 0$ und stetig differenzierbares g mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}$ gezeigt.

Nach den Sätzen 3.1.7 und 3.2.3 wissen wir, daß y und X für $t \geq 0$ exponentiell beschränkt sind. g ist ebenfalls beschränkt. y ist stetig. X ist stückweise stetig, und es existieren die rechts- bzw. linksseitigen Grenzwerte von X in jedem Punkt des Definitionsbereiches. Deshalb können wir Satz 3.2.5 anwenden. Es existieren die Laplace-Integrale

$$\text{Lap}(y)(\omega) := \int_0^{+\infty} e^{-\omega \cdot s} y(s) ds, \quad \text{Lap}(g)(\omega) := \int_0^{+\infty} e^{-\omega \cdot s} g(s) ds,$$

$$\text{Lap}(X)(\omega) := \int_0^{+\infty} e^{-\omega \cdot s} X(s) ds$$

für gewisse $\omega \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem Realteil.

Für y und $t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} y(t) - a \cdot y(t-1) - g(t) - y(0) + a \cdot y(-1) + g(0) &= \\ &= \int_0^t a \cdot (b \cdot y(s) + c \cdot y(s-1)) ds ; \end{aligned}$$

weiter ist das Laplace-Integral von $y(\cdot-1)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Lap}(y(\cdot-1))(\omega) &= \int_0^{+\infty} e^{-\omega s} y(s-1) ds = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\omega(s+1)} y(s) ds + \int_{-1}^0 e^{-\omega(s+1)} y(s) ds = \\ &= e^{-\omega} [\text{Lap}(y)(\omega) + \int_{-1}^0 e^{-\omega \cdot s} \phi(s) ds] . \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Lap}(y - ay(\cdot-1) - g - [y(0) - ay(-1) - g(0)])(\omega) &= \\ &= \text{Lap}\left(\int_0^{\cdot} a[b y(s) + c y(s-1)] ds\right)(\omega) ; \end{aligned}$$

mit 3.2.5 d) folgt

$$\begin{aligned} \text{Lap}(y)(\omega) - a \text{Lap}(y(\cdot-1))(\omega) - \text{Lap}(g-g(0))(\omega) - \text{Lap}(D^0 \phi)(\omega) &= \\ &= \frac{1}{\omega} \cdot a [b \text{Lap}(y)(\omega) + c \text{Lap}(y(\cdot-1))] ; \end{aligned}$$

setzen wir nun das Ergebnis der Berechnung von $\text{Lap}(y(\cdot-1))$ ein und berücksichtigen das g stetig differenzierbar ist, dann erhalten wir mit 3.2.5 d)

$$\begin{aligned} \text{Lap}(y)(\omega) \cdot [1 - a \cdot e^{-\omega}] - \frac{1}{\omega} \text{Lap}\left(\frac{d}{dt} g\right)(\omega) - \frac{1}{\omega} \cdot D^0(\phi) &= \\ &= \frac{1}{\omega} [a \cdot (b + c \cdot e^{-\omega}) \text{Lap}(y)(\omega) + a \cdot e^{-\omega} \cdot (\omega + c) \int_{-1}^0 e^{-\omega s} \phi(s) ds] ; \end{aligned}$$

mit $\Delta(\omega) := \omega(1 - a e^{-\omega}) - a(b + c e^{-\omega})$ wird

$$\begin{aligned} \text{Lap}(y)(\omega) \cdot \Delta(\omega) &= \\ &= D^0(\phi) + a \cdot (\omega + c) \int_{-1}^0 e^{-\omega(s+1)} \phi(s) ds + \text{Lap}\left(\frac{d}{dt} g\right)(\omega) . \end{aligned}$$

Da X und y^0 die Integralgleichung (3.17) erfüllen, erhalten wir analog

$$\begin{aligned} \text{Lap}(X)(\omega) \cdot \Delta(\omega) &= D^0(X_0) = 1 \\ \text{Lap}(y^0)(\omega) \cdot \Delta(\omega) &= D^0(\phi) + a \cdot (\omega + c) \cdot \int_{-1}^0 e^{-\omega \cdot (1+s)} \phi(s) ds . \end{aligned}$$

Aus 3.2.1 (3) wissen wir, daß die Realteile der Nullstellen von Δ nach oben beschränkt sind. Deshalb gibt es ein $z_0 \in \mathbb{C}$, so daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Re}(z_0)$ gilt: $\Delta(z) \neq 0$.

Für $\operatorname{Lap}(y)(\omega)$ ergibt sich mit hinreichend großem ω

$$\operatorname{Lap}(y)(\omega) = \operatorname{Lap}(y^0)(\omega) + \operatorname{Lap}\left(\frac{d}{dt}g\right)(\omega) \cdot \operatorname{Lap}(X)(\omega).$$

Benutzen wir 3.2.5 a)-c), so folgt

$$y(t, 0) = y^0(t, 0) + \int_0^t X(t-s) \frac{d}{ds}g(s) ds = y^0(t, 0) + \int_0^t X(t-s) dg(s)$$

für alle $t \geq 0$.

(2) Nun betrachten wir den Fall mit stetigem g und $t_0=0$, $f=0$.

Sei $t_1 \in \mathbb{R}^+$ beliebig.

Zu t_1 wählen wir $\tau, t_2 \in \mathbb{R}^+$, so daß $t_1 \in (0, t_2)$ gilt. Wir approximieren g auf $[-\tau, t_2 + \tau]$ durch eine Folge von Funktionen $\tilde{g}_n$, $n \in \mathbb{N}$, die auf $[-\tau, t_2 + \tau]$ stetig differenzierbar sind.

Jedes $\tilde{g}_n$ können wir zu einem g_n so abändern, daß die g_n auf $[0, t_2]$ gleichmäßig gegen g konvergieren, jedes g_n auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und stetig differenzierbar ist und einen kompakten Träger in $\mathbb{R}$ hat.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei mit g_n folgende Abbildung definiert.

$$D_n: \mathbb{R} \times C \rightarrow C, (t, \phi) \mapsto D^0(\phi) - g_n(t) =: D_n(t, \phi)$$

Nach dem unter (1) gezeigten erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Lösung $y^n(\cdot, 0, \phi)$ der Gleichung

$$\frac{d}{dt}D_n(t, y_t) = F^0(y_t)$$

zum Anfangswert $(0, \phi) \in \mathbb{R} \times C$ für $t \geq 0$ in der Darstellung

$$y^n(t, 0, \phi) = y^0(t, 0, \phi) + \int_0^t X(t-s) dg_n(s).$$

X ist auf kompakten Intervallen von beschränkter Variation, und g ist stetig. Damit existiert das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_0^t g(s) dX(t-s) \text{ bzw. } \int_0^t X(t-s) dg(s) \text{ für } t \geq 0.$$

Ist $\tilde{y}(t) := y^0(t, 0, \phi) + \int_0^t X(t-s) dg(s)$ für $t \geq 0$ und $\tilde{y}(0) := \phi(0)$ für $0 \in [-1, 0]$, dann gilt nach partieller Integration des Stieltjes-Integrals

$$|\tilde{y}(t) - y^n(t, 0, \phi)| \leq |g(t) - g_n(t)| + |X(t) \cdot [g(0) - g_n(0)]| + \left| \int_0^t g(s) - g_n(s) dX(t-s) \right|.$$

Wir erhalten für $t \in [0, t_2]$ die Abschätzung

$$\left| \int_0^t g(s) - g_n(s) dX(t-s) \right| \leq \sup\{|g(s) - g_n(s)| \mid s \in [0, t_2]\} \cdot \text{var} X(0, t_2).$$

Die beiden letzten Abschätzungen liefern die gleichmäßige Konvergenz von y^n gegen $\tilde{y}$ auf $[0, t_2]$. $\tilde{y}$ ist insbesondere stetig in $[0, t_2]$.

Die Konvergenz der Folgen $D_n(t, y_t^n)$ gegen $D^0(\tilde{y}_t) - g(t)$ und $F^0(y_t^n) = \frac{d}{dt} D_n(t, y_t^n)$ gegen $F^0(\tilde{y}_t)$ ist gleichmäßig für $t \in [0, t_2]$.

Nach einem Satz der Analysis ist dann

$$F^0(\tilde{y}_t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d}{dt} D_n(t, y_t^n) = \frac{d}{dt} [D^0(\tilde{y}_t) - g(t)],$$

und $\tilde{y}$ erfüllt die Gleichung

$$\frac{d}{dt} [D^0(y_t) - g(t)] = F^0(y_t)$$

für $t \in [0, t_2]$ mit dem Anfangswert $(0, \phi) \in \mathbb{R} \times C$.

Die Lösung y dieser Gleichung zum Anfangswert $(0, \phi) \in \mathbb{R} \times C$ erfüllt diese Gleichung ebenfalls für $t \in [0, t_2]$. Nach der Bemerkung 3.1.6 gilt dann $y(t) = \tilde{y}(t)$ für alle $t \in [0, t_2]$.

Für $t_1 \in [0, t_2]$ besitzt $\tilde{y}$ die behauptete Darstellung und damit auch y . Da t_1 beliebig war, erhalten wir y für alle $t_1 \geq 0$ in der Form (3.19).

(3) Um den Fall mit nicht verschwindendem f zu erhalten, bedenken wir, daß $f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(s) ds$ gilt. Wir können deshalb f mit g auf der linken Seite von (3.18) in ein

$$g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto g(t) + \int_0^t f(s) ds$$

zusammenfassen.

(4) Im Fall $t_0 \neq 0$ betrachten wir die Lösung z zu einem Anfangswert $(0, \phi) \in \mathbb{R} \times C$ der Gleichung

$$\frac{d}{dt}[D^0(y_t) - g(t+t_0)] = F^0(y_t) + f(t+t_0).$$

Setzen wir $y(t) := z(t-t_0)$ für $t \geq t_0$, dann gilt:

$$\frac{d}{dt}[D^0(y_t) - g(t)] = F^0(y_t) + f(t).$$

Also erfüllt y (3.18) mit Anfangswert (t_0, ϕ) .

Wir benutzen die Integraldarstellung für z und $t \geq 0$.

$$\begin{aligned} y(t+t_0) &= z(t) = \\ &= y^0(t, 0, \phi) + \int_0^t f(s+t_0)X(t-s)ds + \int_0^t X(t-s)dg(s+t_0). \end{aligned}$$

Nach der Substitution $\tau := t_0 + t$ und $y^0(t, 0, \phi) = y^0(t+t_0, t_0, \phi)$ folgt die Behauptung. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

◇

Als nächstes wollen wir die Möglichkeit der Zerlegung der Lösung auch in der Darstellung (3.19) untersuchen.

Als Notation führen wir ein

$$T^0(t)X_0(\theta) := X(t+\theta) = X_t(\theta), \quad t \geq 0, \theta \in [-1, 0]$$

und setzen mit den Projektionen aus Satz 3.2.2

$$\phi^P := \prod_{W(a)} \phi \text{ und } \phi^Q := (id_C - \prod_{W(a)})\phi, \text{ für alle } \phi \in C,$$

$$P := P(a) := \prod_{W(a)} C \text{ und } Q := Q(a) := (id_C - \prod_{W(a)})C.$$

Folgende kleine Überlegung wird uns eine einfachere Schreibweise ermöglichen. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$, $t \geq t_0$ und $\theta \in [-1, 0]$.

Zunächst führen wir folgende Abkürzung ein:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t X(t+\theta-s)(dg(s)+f(s)ds) &:= \\ &= \int_{t_0}^t X(t+\theta-s)dg(s) + \int_{t_0}^t X(t+\theta-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Für $t+\theta \geq t_0$ ist

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t X(t+\theta-s)(dg(s)+f(s)ds) &= \\ &= \int_{t_0}^{t+\theta} X(t+\theta-s)(dg(s)+f(s)ds) + \int_{t+\theta}^t X(t+\theta-s)(dg(s)+f(s)ds); \end{aligned}$$

für $s \in (t+\theta, t]$ ist $t+\theta-s \in [\theta, 0)$, und damit ist $X(t+\theta-s) = 0$;
also ist

$$\int_{t+\theta}^t X(t+\theta-s)(dg(s)+f(s)ds) = 0.$$

Für $t+\theta < t_0$ und $s \in (t_0, t]$ erhalten wir $0 > t+\theta-s \geq \theta$, und es ist
wieder $X(t+\theta-s) = 0$; also

$$\int_{t_0}^t X(t+\theta-s)(dg(s)+f(s)ds) = 0.$$

So erhalten wir aus der Darstellung (3.19) für die Lösung
der inhomogenen Gleichung

$$y_t(\theta) = y_t^0(\theta) + \int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0(\theta)[dg(s)+f(s)ds]$$

für $t \geq t_0$ und $\theta \in [-1, 0]$.

Seien W und Δ wie in Satz 3.2.2 und $I := [-1, 0]$; dann sind
folgenden Funktionen wohldefiniert:

für $t \in \mathbb{R}$

$$T^0(t)X_0^P: I \rightarrow \mathbb{R}, \theta \mapsto \sum_{\omega \in W} e^{\omega(t+\theta)} / \frac{d}{dz} \Delta(\omega);$$

für $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$T^0(t)X_0: I \rightarrow \mathbb{R}, \theta \mapsto T^0(t)X_0(\theta),$$

$$T^0(t)X_0^Q: I \rightarrow \mathbb{R}, \theta \mapsto T^0(t)X_0^Q(\theta) := T^0(t)X_0(\theta) - T^0(t)X_0^P(\theta);$$

für $t, t_0 \in \mathbb{R}, t \geq t_0$

$$\int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0^P dg(s): I \rightarrow \mathbb{R}, \theta \mapsto \int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0^P(\theta) dg(s),$$

$$\int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0^P f(s)ds: I \rightarrow \mathbb{R}, \theta \mapsto \int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0^P(\theta) f(s)ds,$$

$$\int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0 dg(s): I \rightarrow \mathbb{R}, \theta \mapsto \int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0(\theta) dg(s),$$

$$\int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0 f(s)ds: I \rightarrow \mathbb{R}, \theta \mapsto \int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0(\theta) f(s)ds,$$

$$\int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0^Q dg(s): I \rightarrow \mathbb{R}, \theta \mapsto \int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0^Q(\theta) dg(s),$$

$$\int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0^Q f(s)ds: I \rightarrow \mathbb{R}, \theta \mapsto \int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0^Q(\theta) f(s)ds.$$

3.2.7 Satz

Es sollen die Voraussetzungen der Sätze 3.2.2 und 3.2.6 gelten.

Dann folgt:

Die Lösung y_t zum Anfangswert $(t_0, \phi) \in \mathbb{R} \times C$ der inhomogenen Funktional-Differentialgleichung (3.18) läßt sich wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned} y_t^P &= T^0(t-t_0)\phi^P + \int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0^P dg(s) + \int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0^P f(s)ds = \\ &= T^0(t-t_0)\{\phi^P + \int_{t_0}^t T^0(t_0-s)X_0^P dg(s) + \int_{t_0}^t T^0(t_0-s)X_0^P f(s)ds\} \end{aligned}$$

für $t, t_0 \in \mathbb{R}$, $t \geq t_0$;

$$y_t^Q = T^0(t-t_0)\phi^Q + \int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0^Q dg(s) + \int_{t_0}^t T^0(t-s)X_0^Q \cdot f(s)ds$$

für $t, t_0 \in \mathbb{R}$, $t \geq t_0$.

Beweis:

Für y_t^P , $t \geq t_0$ und $\theta \in [-1, 0]$ gilt

$$y_t^P(\theta) = \Pi_W y_t(\theta) = \sum_{\omega \in W} e^{\omega \cdot \theta} (\Pi_\omega y_t) \left(\frac{d}{dz} \Delta(\omega) \right)^{-1} .$$

Betrachten wir für $\omega \in W$ die Funktion

$$v: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{-\omega(t-t_0)} \cdot [\Pi_\omega y_t - g(t)] .$$

dann ist $\frac{d}{dt}v(t) = [\omega \cdot g(t) + f(t)] \cdot e^{-\omega(t-t_0)}$.

Dies sieht man so:

$$\begin{aligned} \Pi_\omega y_t - g(t) &= D^0 y_t + a(c+\omega) \int_{-1}^0 e^{-\omega(1+s)} y_t(s) ds - g(t) = \\ &= D^0 y_t + a(c+\omega) \int_{t-1}^t e^{-\omega(1+s-t)} y(s) ds - g(t); \end{aligned}$$

eine einfache Rechnung zeigt für $\psi \in C$

$$\omega D^0 \psi - F^0 \psi = (\omega - ab)\psi(0) - a(\omega + c)\psi(-1) ;$$

damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) &= e^{-\omega(t-t_0)} \left\{ \frac{d}{dt}[D^0 y_t - g(t)] - \omega[D^0 y_t - g(t)] \right\} + \\ &\quad + a(c+\omega)e^{-\omega(t-t_0)} \{e^{-\omega y(t)-y(t-1)}\} = \\ &= e^{-\omega(t-t_0)} \{F^0 y_t + f(t) - \omega[D^0 y_t - g(t)]\} + \\ &\quad + a(c+\omega)e^{-\omega(t-t_0)} \{e^{-\omega y(t)-y(t-1)}\} = \\ &= e^{-\omega(t-t_0)} [f(t) + \omega \cdot g(t)] . \end{aligned}$$

Nun folgt nach Integration für $t \geq t_0$

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t [\omega g(s) + f(s)] e^{-\omega(s-t_0)} ds,$$

und

$$v(t) - v(t_0) = e^{-\omega(t-t_0)} [\Pi_{\omega} y_t - g(t)] - [\Pi_{\omega} y_{t_0} - g(t_0)] .$$

Damit wird für $t \in \mathbb{K}$, $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \Pi_{\omega} y_t &= g(t) + \\ &\quad + e^{\omega(t-t_0)} \{ \Pi_{\omega} y_{t_0} - g(t_0) + \int_{t_0}^t [\omega g(s) + f(s)] e^{-\omega(s-t_0)} ds \} ; \end{aligned}$$

für $\theta \in [-1, 0]$, $t \in \mathbb{K}$, $t \geq t_0$ folgt

$$\begin{aligned} y_t^P(\theta) &= \sum_{\omega \in W} e^{\omega \theta / (\frac{d}{dz} \Delta(\omega))} \cdot e^{\omega(t-t_0)} \Pi_{\omega} y_{t_0} + \\ &\quad + \sum_{\omega \in W} e^{\omega \theta / (\frac{d}{dz} \Delta(\omega))} \cdot [g(t) - e^{\omega(t-t_0)} g(t_0) + \\ &\quad + \int_{t_0}^t [\omega g(s) + f(s)] e^{\omega(t-s)} ds] = \\ &= T^0(t-t_0) y_{t_0}^P(\theta) + \int_{t_0}^t T^0(t-s) X_0^P(\theta) [dg(s) + f(s) ds] . \end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir

$$\begin{aligned} y_t^P &= T^0(t-t_0) \{ \Phi^P + \int_{t_0}^t T^0(t_0-s) X_0^P dg(s) + \int_{t_0}^t T^0(t_0-s) X_0^P f(s) ds \} ; \\ y_t^Q &= y_t - y_t^P \text{ liefert die Behauptung.} \end{aligned}$$

◇

Der Beweis dieses Satzes findet sich in ähnlicher Weise in [17].

Nach diesem Satz führen wir für $t \in \mathbb{R}_0^+$ folgende Bezeichnungen und Funktionen ein.

$$X^P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}, t \mapsto X^P(t) := \sum_{\omega \in W} e^{\omega \cdot t} \left(\frac{d}{dz} \Delta(\omega) \right)^{-1},$$

$$X^Q: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{K}, t \mapsto X^Q(t) := X(t) - X^P(t),$$

$$\dot{X}^Q: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{K}, t \mapsto \dot{X}^Q(t) := \dot{X}(t) - \dot{X}^P(t),$$

$$X_t^P: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{K}, \theta \mapsto X_t^P(\theta) := X^P(t+\theta) \text{ für } t \in \mathbb{R},$$

$$X_t^Q: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{K}, \theta \mapsto X_t^Q(\theta) := X^Q(t+\theta) \text{ für } t \in [0, +\infty),$$

$$\dot{X}_t^Q: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{K}, \theta \mapsto \dot{X}_t^Q(\theta) := \dot{X}^Q(t+\theta) \text{ für } t \in [0, +\infty),$$

$$T^0(t) \dot{X}_0^Q := \dot{X}_t^Q \text{ für } t \in \mathbb{R}^+;$$

offenbar gilt mit diesen Definitionen

$$X_t^Q = T^0(t) X_0^Q \text{ für } t \in [0, +\infty) \text{ und } X_t^P = T^0(t) X_0^P \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

Im weiteren soll nun das Wachstumsverhalten der Komponenten y_t^P , y_t^Q und X_t^P , X_t^Q der Lösungen der homogenen linearen Gleichung studiert werden.

Dazu benötigen wir zwei Hilfssätze, die wir als nächstes zur Verfügung stellen. Das Lemma 3.2.9 ist eine leichte Modifikation des Lemmas 4.2 aus [17] S.180. Der Unterschied zu Hales Lemma besteht nur darin, daß die betrachtete Halbgruppe von einem Parameter abhängt. Als eine Erweiterung der Aussage des Lemmas in [17] erhalten wir für das Wachstum der Halbgruppen Abschätzungen, die vom Parameter lokal unabhängig sind.

3.2.8 Lemma

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $g \in C([a, b], \mathbb{R})$. Weiter sei gegeben

$$H(a, b) := \{h \in C([a, b], \mathbb{R}) \mid \int_a^b |h(t)| dt \leq 1, h(a) = h(b) = 0\};$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} |g| &:= \sup\{|g(t)| \mid t \in [a, b]\} = \\ &= \sup\left\{ \left| \int_a^b g(s)h(s) ds \right| \mid h \in H(a, b) \right\} =: s. \end{aligned}$$

Beweis:

Zunächst stellen wir fest, daß für $h \in H(a, b)$

$$\left| \int_a^b h(t)g(t) dt \right| \leq |g| \cdot \int_a^b |h(s)| ds \leq |g|, \text{ also } s \leq |g|$$

gilt.

Wir zeigen:

Es gibt eine Folge h_n in $H(a, b)$ mit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b h_n(t)g(t) dt = |g|$.

Dazu betrachten wir einen beliebigen Punkt $x_0 \in (a, b)$ und wählen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, daß $[x_0 - \frac{1}{n_0}, x_0 + \frac{1}{n_0}]$ in (a, b) liegt. Zu jedem $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$ wählen wir eine Funktion $h_n \in H_1$ mit

$$h_n(x) = 0, \text{ für } x \in [a, b] \setminus (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$$

$$h_n(x) > 0, \text{ für } x \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$$

$$\int_a^b h_n(t) dt = \int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} h_n(t) dt = 1.$$

Mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung erhalten wir sofort

$$\int_a^b h_n(t)g(t) dt = \int_{x_0 - \frac{1}{n}}^{x_0 + \frac{1}{n}} h_n(t)g(t) dt = g(x_n) \text{ mit } x_n \in [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}].$$

Also $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_a^b h_n(t)g(t) dt \right| = |g(x_0)|$ und $s \geq |g(x_0)|$.

Da x_0 beliebig aus (a, b) und g stetig ist, wird auch $s \geq |g|$. Mit der ersten Ungleichung folgt die Behauptung des Lemmas.

◇

3.2.9 Lemma

Sei J ein beschränktes offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $L(B)$ der Banach-Raum der beschränkten linearen Abbildungen von einem Banach-Raum B nach B .

$\{T(a,t) \mid a \in J, t \in \mathbb{R}_0^+\}$ sei eine Menge aus $L(B)$.

Für alle $\phi \in B$ sei die Abbildung

$$T(\cdot, \cdot)\phi: J \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow B, (a,t) \mapsto T(a,t)\phi$$

und für jedes $t \in \mathbb{R}_0^+$ die Abbildung

$$T(\cdot, t): J \rightarrow L(B), a \mapsto T(a,t) \text{ stetig.}$$

Für festes a sei $\{T(a,t) \mid t \in \mathbb{R}_0^+\}$ eine Halbgruppe.

Für ein $t_0 \in \mathbb{R}^+$ sei der Spektralradius $\tilde{\rho}(T(a,t_0))$ von $T(a,t_0)$ eine beschränkte Funktion

$$\tilde{\rho}: J \rightarrow \mathbb{R}^+, a \mapsto \tilde{\rho}(a) := \tilde{\rho}(T(a,t_0)) \leq e^{kt_0}, k \in \mathbb{R}.$$

Dann gibt es zu jedem $a_0 \in J$ und jedem $k_1 \in \mathbb{R}^+$ ein offenes Intervall $J_1 = J_1(a_0, k_1)$ mit $a_0 \in J_1$, $J_1 \cup \text{Rd}J_1 \subset J$ und ein $k_2 := k_2(a_0, k_1) \in \mathbb{R}^+$, $k_2 > 1$, so daß für alle $a \in J_1$, alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ und alle $\phi \in B$ gilt:

$$|T(a,t)\phi| \leq |\phi| \cdot k_2(a_0, k_1) \cdot e^{(k+k_1) \cdot t}.$$

Beweis:

Es gilt zunächst $\tilde{\rho}(a_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} |T^n(a_0, t_0)|^{\frac{1}{n}} \leq e^{kt_0}$.

Für jedes $k_1 \in \mathbb{R}^+$ gibt es dann wegen

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-(k+k_1) \cdot t_0} \cdot |T^n(a_0, t_0)|^{\frac{1}{n}} \leq e^{-k_1 \cdot t_0} < 1$$

ein $m = m(a_0, k_1) \in \mathbb{N}$ mit

$$e^{-(k+k_1) \cdot t_0 \cdot m} \cdot |T^m(a_0, t_0)| < q \leq 1.$$

Wegen der Stetigkeit in a von $T(a, m \cdot t_0) = T^m(a, t_0)$ gibt es ein offenes Intervall $J_1(a_0, k_1) \subset J$ mit $J_1 \cup \text{Rd}J_1 \subset J$, so daß für $a \in J_1 \cup \text{Rd}J_1$ ebenfalls gilt:

$$e^{-(k+k_1) \cdot t_0 \cdot m} \cdot |T^m(a, t_0)| \leq q < 1;$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ wird dann

$$e^{-(k+k_1) \cdot t_0 \cdot m \cdot n} \cdot |T^{m \cdot n}(a, t_0)| \leq q^n < 1.$$

Nach dem Satz über die gleichmäßige Beschränktheit gibt es ein $k_3 \in \mathbb{R}^+$, so daß $|T(a, t)| \leq k_3$ für alle $(a, t) \in J_1 \times [0, t_0 \cdot m]$ ist.

Mit k_3 setzen wir $k_2 := k_3 \cdot e^{(k+k_1) \cdot m \cdot t_0}$.

Für $t \in [0, t_0 \cdot m]$, $a \in J_1$ und $\phi \in B$ erhalten wir so

$$|T(a, t)\phi| \leq |T(a, t)| \cdot |\phi| \leq k_2 \cdot e^{(k+k_1) \cdot t} \cdot |\phi|$$

und für $t \in [n \cdot m \cdot t_0, (n+1) \cdot m \cdot t_0)$ ergibt sich mit $t_n := n \cdot m \cdot t_0$

$$\begin{aligned} |T(a, t)\phi| &\leq |T(a, t)| \cdot |\phi| \leq |T(a, t-t_n)| \cdot |T^n(a, m \cdot t_0)| \cdot |\phi| \leq \\ &\leq k_3 e^{(k+k_1)(t-t_n)} e^{(k+k_1)(t-t_n)} |T^n(a, m \cdot t_0)| \cdot |\phi| \leq \\ &\leq k_2 \cdot q^n \cdot e^{(k+k_1) \cdot t} \cdot |\phi| \leq k_2 \cdot e^{(k+k_1) \cdot t} \cdot |\phi|. \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

◇

3.2.10 Satz

Gegeben seien $b, c \in \mathbb{R}$ und ein offenes Intervall $J \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $0 \notin \text{Rd}J$, $\sup\{|a| \mid a \in J\} < 1$.

Für jedes $a \in J$ seien die folgenden Abbildungen gegeben:

$$D^0(a, \cdot): C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto D^0(a, \phi) := \phi(0) - a \cdot \phi(-1)$$

$$F^0(a, \cdot): C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto F^0(a, \phi) := a(b \cdot \phi(0) + c \cdot \phi(-1)).$$

Zu jedem $a \in J$ ist

$$\Delta(a, \cdot): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \Delta(a, z) := z(1 - a \cdot e^{-z}) - a \cdot (b + c \cdot e^{-z})$$

die charakteristische Funktion der Funktional-Differentialgleichung

$$(3.20) \quad \frac{d}{dt} D^0(a, y_t) = F^0(a, y_t).$$

Es sei $k \in \mathbb{R}$ mit $0 > 2k > \sup\{\ln(|a|) \mid a \in J\}$, und es sei $n \in \mathbb{N}$.
Für jedes $a \in J$ gelte

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a, z) = 0\} = \\ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a, z) = 0, |\operatorname{Re}(z)| < -k\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a, z) = 0, \operatorname{Re}(z) < 2k\}.$$

Wir setzen $W := W(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a, z) = 0, |\operatorname{Re}(z)| < -k\}$.

$W(a)$ sei durch paarweise verschiedene $\omega_i(a) \in \mathbb{C}$, $i=1, \dots, n$ gegeben; also $W(a) = \{\omega_1(a), \dots, \omega_n(a)\}$.

Die $\omega_i(a)$, $i=1, \dots, n$ seien von $\Delta(a, \cdot)$ Nullstellen erster Ordnung.

Die n Funktionen

$$\omega_i: J \rightarrow \mathbb{C}, a \mapsto \omega_i(a), i=1, \dots, n$$

seien stetig differenzierbar.

C ist für jedes $a \in J$ bezüglich $W(a)$ entsprechend Satz 3.2.2 mit den Projektionen $\Pi_W = \Pi_{W(a)}$ in die Räume $Q = Q(a)$ und $P = P(a)$ zerlegt.

Dann gibt es zu jedem $a_0 \in J$ ein offenes Intervall $J_1 = J_1(a_0)$ mit $a_0 \in J_1$, $J_1 \cup \operatorname{Rd} J_1 \subset J$ und Konstanten $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $a \in J_1$ die Lösungsoperatoren $T^0(a, t)$ und die Fundamentallösung $X(a, \cdot)$ die folgenden Abschätzungen erfüllen.

$$\begin{aligned} \text{a) } |X_t^Q(a)| &\leq k_2 \cdot e^{(k-k_1)t}, \quad |\dot{X}_t^Q(a)| \leq k_2 \cdot e^{(k-k_1)t}, \\ |T^0(a, t)\phi^Q| &\leq k_2 \cdot e^{(k-k_1)t} \cdot |\phi^Q|, \quad \text{für } t \geq 0; \\ \text{b) } |X_t^P(a)| &\leq k_2 \cdot e^{r_0(a) \cdot |t|}, \quad |\dot{X}_t^P(a)| \leq k_2 \cdot e^{r_0(a) \cdot |t|}, \\ |T^0(a, t)\phi^P| &\leq k_2 \cdot e^{r_0(a) \cdot |t|} \cdot |\phi^P|, \end{aligned}$$

mit $r_0(a) := \sup\{|\operatorname{Re}(\omega(a))| \mid \omega(a) \in W(a)\}$, $a \in J_1$, $t \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Die Menge der Nullstellen von $\Delta(a, \cdot)$ ist für jedes $a \in J$ in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt.

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a, z) = 0\} = \\ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a, z) = 0, |\operatorname{Re}(z)| < -k\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a, z) = 0, \operatorname{Re}(z) < 2k\}.$$

Für jedes $a \in J$ ist damit jedes $k_0 \in (2k, k)$ nicht im Abschluß der Menge der Realteile der Elemente des Spektrums des infinitesimalen Generators G_a der Halbgruppe der Lösungsoperatoren von (3.20); also $k_0 \notin \operatorname{cl}(\operatorname{Re}(S(G_a)))$.

Damit gilt für das Spektrum der induzierten Operatoren $T^0(a, t)|_Q$ mit $t \in \mathbb{R}^+$ nach 3.2.1 (6)

$$S(T^0(a, t)|_Q) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq e^{(k_0 - d)t}\} \text{ mit } d \in \mathbb{R}^+.$$

Insbesondere gilt für den Spektralradius des Operators zum Zeitpunkt $t = 1$

$$\tilde{\rho}_Q(a) := \rho(T^0(a, 1)|_Q) \leq e^{k_0}.$$

Da k_0 beliebig aus $(2k, k)$ wählbar ist, folgt $\tilde{\rho}_Q(a) \leq e^{2k}$.

Diese Abschätzung gilt für alle $a \in J$.

Wir wählen zu einem gegebenen $a_0 \in J$ ein offenes Intervall $J_2 = J_2(a_0)$ mit $J_2 \cup \operatorname{Rd} J_2 \subset J$.

Um $T^0(a, t)\phi^Q$ abzuschätzen, wollen wir Lemma 3.2.9 benutzen.

Dazu betrachten wir zu jedem $a \in J_2$ die Operatoren für $t \geq 0$

$$T^0(a, t)(\operatorname{id}_C - \prod_{W(a)}): C \rightarrow C, \quad \phi \mapsto T^0(a, t)(\operatorname{id}_C - \prod_{W(a)})\phi;$$

für festes ϕ ist mit Satz 3.2.2 (1) (ii)

$$\prod_{W(\cdot)}\phi: J \rightarrow C, \quad a \mapsto \prod_{W(a)}\phi, \quad \prod_{W(\cdot)}: J \rightarrow L(C), \quad a \mapsto \prod_{W(a)}$$

und mit Folgerung 3.1.8

$$T^0(\cdot, \cdot)\phi: J \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow C, \quad (a, t) \mapsto T^0(a, t)\phi$$

stetig. Ebenso ist für jedes $t \in \mathbb{R}_0^+$ die Abbildung

$$T^0(\cdot, t): J \rightarrow L(C), \quad a \mapsto T^0(a, t)$$

mit Satz 3.1.7 stetig.

Damit sind aber auch die Abbildungen

$$T^0(\cdot, \cdot)(\text{id}_C - \prod_{W(\cdot)} \Phi): J \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow C, (a, t) \mapsto T^0(a, t)(\text{id}_C - \prod_{W(a)} \Phi)$$

$$T^0(\cdot, t)(\text{id}_C - \prod_{W(\cdot)} \Phi): J \rightarrow L(C), a \mapsto T^0(a, t)(\text{id}_C - \prod_{W(a)} \Phi)$$

stetig.

Wir zeigen für den Spektralradius

$$\tilde{\rho}(T^0(a, 1)(\text{id}_C - \prod_{W(a)} \Phi)) = \tilde{\rho}_Q(a) ;$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_Q(a) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [\sup\{|T^0(a, 1)^n \Phi| / |\Phi| \mid \Phi \in Q(a) \setminus \{0\}\}]^{\frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [\sup\{|T^0(a, 1)^n (\text{id}_C - \prod_{W(a)} \Phi)| / |\Phi| \mid \Phi \in Q(a) \setminus \{0\}\}]^{\frac{1}{n}} \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} [\sup\{|T^0(a, 1)(\text{id}_C - \prod_{W(a)} \Phi)|^n / |\Phi|^n \mid \Phi \in C \setminus \{0\}\}]^{\frac{1}{n}} \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} [\sup\{|T^0(a, 1)^n \Psi| / |\Psi| \mid \Psi := (\text{id}_C - \prod_{W(a)} \Phi) \Phi \neq 0, \Phi \in C\}]^{\frac{1}{n}} = \\ &= \tilde{\rho}_Q(a) . \end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 3.2.9 durch die Operatoren $T^0(a, t)(\text{id}_C - \prod_{W(a)} \Phi)$ erfüllt. Also gibt es zu $a_0 \in J_2(a_0)$ und $k_1 := -\frac{1}{2}k$ ein k_4 und ein offenes Intervall $J_1 = J_1(a_0)$ mit $a_0 \in J_1$, $J_1 \subset J_2$, so daß für alle $a \in J_1$, $\Phi \in Q(a)$ gilt:

$$\begin{aligned} |T^0(a, t)\Phi| &= |T^0(a, t)(\text{id}_C - \prod_{W(a)} \Phi)\Phi| \leq \\ &\leq k_4(k_1, a_0) \cdot e^{(2k+k_1)t} |\Phi| \leq k_4 \cdot e^{(k-k_1)t} \cdot |\Phi| . \end{aligned}$$

Nun zeigen wir die Abschätzungen für X^Q . Zu einem $\tau \in (0, 1)$ betrachten wir die Funktionenmengen $H_1 := H(0, \tau)$ und $H_2(\tau, 1)$, die wie in Lemma 3.2.8 definiert seien, und die Intervalle $I_1 := [0, \tau]$, $I_2 := [\tau, 1]$.

Weiter sei $H_3 := H(0, 1)$ wie in Lemma 3.2.8 und $I_3 := [0, 1]$.

Für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ setzen wir jedes $h_i \in H_i$ durch $h_i(t) := 0$ für $t \in \mathbb{R} \setminus I_i$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fort.

Für $i \in \{1, 2, 3\}$, $a \in J$ und $h_i \in H_i$ sei $z(\cdot, a, h_i)$ die Lösung der Gleichung

$$(3.21) \quad \frac{d}{dt} D^0(a, y_t) = F^0(a, y_t) + h_i(t) ,$$

zum Anfangswert $(0, 0) \in \mathbb{R} \times C$.

Für $i \in \{1, 2, 3\}$ erfüllt dann die Funktion

$$y(\cdot, a, h_i): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto y(t, a, h_i) := z(t+1, a, h_i)$$

für $t \geq 0$ die Gleichung

$$(3.22) \quad \frac{d}{dt} D^0(a, y_t) = F^0(a, y_t).$$

Nach der Bemerkung 3.1.6 stimmt y mit der Lösung der Gleichung (3.22) zum Anfangswert $(0, z_1(a, h_i))$ für $t \geq 0$ überein.

Mit Satz 3.2.7 und dem zuvor gezeigten folgt für $t_1 \geq 0$, $\theta \in [-1, 0]$

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1+1} T^0(a, t_1+1-s) X_0^Q(\theta) h_i(s) ds &= |z_{t_1+1}^Q(a, h_i)(\theta)| = \\ &= |y_{t_1}^Q(a, h_i)(\theta)| \leq k_4 \cdot e^{(k-k_1) \cdot t_1} \cdot |y_0^Q(a, h_i)|. \end{aligned}$$

Für $\theta = -1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{t_1+1} T^0(a, t_1+1-s) X_0^Q(\theta) h_i(s) ds \right| &= \\ &= \left| \int_0^{t_1+1} X^Q(a, t_1-s) h_i(s) ds \right| \leq k_4 \cdot e^{(k-k_1) \cdot t_1} \cdot |z_1^Q(a, h_i)|. \end{aligned}$$

$$\text{Nun ist } z_1^Q(a, h_i) = \int_0^1 T^0(a, 1-s) X_0^Q h_i(s) ds.$$

Eine einfache Rechnung zeigt die gleichmäßige Beschränktheit von z_1^Q für alle $a \in J_1$ und $h_i \in H_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, etwa $|z_1^Q(a, h_i)| \leq k_5 \in \mathbb{R}^+$.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T X^Q(a, t_1-s) h_1(s) ds \right| &\leq k_4 \cdot k_5 \cdot e^{(k-k_1) \cdot t_1}, \\ \left| \int_T^1 X^Q(a, t_1-s) h_2(s) ds \right| &\leq k_4 \cdot k_5 \cdot e^{(k-k_1) \cdot t_1}, \\ \left| \int_0^1 X^Q(a, t_1-s) h_3(s) ds \right| &\leq k_4 \cdot k_5 \cdot e^{(k-k_1) \cdot t_1}. \end{aligned}$$

Mit diesen Abschätzungen und Lemma 3.2.8 zeigen wir nun die Behauptung für X^Q .

Da $X^Q(a, t) = X(a, t) - X^P(a, t)$ für $t \in \mathbb{R}$, $t \geq -1$, $a \in J_1$ ist, wird das Stetigkeitsverhalten von X^Q durch das Stetigkeitsverhalten von X^P und X bestimmt.

X^P ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Nach Satz 3.2.3 ist X auf allen Intervallen $(n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ stetig; die rechts- und linksseitigen Grenzwerte von X existieren an allen Stellen $n \in \mathbb{N}_0$, der rechtsseitigen Grenzwert von X an der Stelle $t = -1$ existiert, und es gilt:

$$X(n^+) - X(n^-) = a^n, \quad X(n^+) = X(n) \quad .$$

X^Q hat die gleichen Stetigkeitseigenschaften wie X . Es gilt insbesondere:

$$X^Q(n^+) - X^Q(n^-) = a^n, \quad X^Q(n^+) = X^Q(n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

Daraus folgt:

Für alle $t_1 \in \mathbb{N}_0^+$ hat die Restriktion von X^Q auf das Intervall $[t_1-1, t_1]$ genau eine Unstetigkeitsstelle $t_1-\tau$, $\tau \in [0, 1]$.

(1) Wir schätzen X^Q auf dem Intervall $[t_1-1, t_1-\tau]$ ab. An der Stelle $t_1-\tau$ existiert der Grenzwert von links von X^Q . Also läßt sich die Restriktion von X^Q auf das Intervall $[t_1-1, t_1-\tau]$ zu einer stetigen Funktion $\tilde{X}^Q$ auf das Intervall $[t_1-1, t_1-\tau]$ fortsetzen.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \sup\{|X^Q(a, t_1-s)| \mid s \in (\tau, 1]\} &= \\ &= \sup\{|\tilde{X}^Q(a, t_1-s)| \mid s \in [\tau, 1]\} \quad ; \end{aligned}$$

(ii) für $h_2 \in H_2$, $\tau \in (0, 1)$ nach Lemma 3.2.8

$$\begin{aligned} \sup\{|\tilde{X}^Q(a, t_1-s)| \mid s \in [\tau, 1]\} &= \\ &= \sup\{|\int_{\tau}^1 \tilde{X}^Q(a, t_1-s) h_2(s) ds| \mid h_2 \in H_2\} \quad ; \end{aligned}$$

(iii) für $h_2 \in H_2$, $\tau \in (0, 1)$

$$|\int_{\tau}^1 \tilde{X}^Q(a, t_1-s) h_2(s) ds| = |\int_{\tau}^1 X^Q(a, t_1-s) h_2(s) ds| \quad ;$$

(iv) für $h_2 \in H_2$, $\tau \in (0, 1)$

$$|\int_{\tau}^1 X^Q(a, t_1-s) h_2(s) ds| \leq k_4 \cdot k_5 \cdot e^{(k-k_1)t_1} \quad .$$

Aus (i) bis (iv) folgt für $\tau \in (0,1)$

$$\sup\{|X^Q(a, t_1-s)| \mid s \in (\tau, 1]\} \leq k_4 \cdot k_5 \cdot e^{(k-k_1)t_1}.$$

Für $\tau=0$ erhält man mit der Integralabschätzung mit den Funktionen $h_3 \in H_3$ eine entsprechende Abschätzung. Also gilt sogar für $\tau \in [0,1]$

$$\sup\{|X^Q(a, t_1-s)| \mid s \in (\tau, 1]\} \leq k_4 \cdot k_5 \cdot e^{(k-k_1)t_1}.$$

(2) Nun schätzen wir X^Q auf dem Intervall $[t_1-\tau, t_1]$ im Fall $\tau \in (0,1)$ ab.

Die Restriktion von X^Q auf das Intervall $[t_1-\tau, t_1]$ ist stetig, da $t_1-\tau$ die einzige Unstetigkeitsstelle der Restriktion von X^Q auf das Intervall $[t_1-\tau, t_1]$ ist. Damit gilt nach Lemma 3.2.8

$$\begin{aligned} \sup\{|X^Q(a, t_1-s)| \mid s \in [0, \tau]\} &= \\ &= \sup\{|\int_0^\tau X^Q(a, t_1-s) h_1(s) ds| \mid h_1 \in H_1\}, \end{aligned}$$

und weiter ist

$$|\int_0^\tau X^Q(a, t_1-s) h_1(s) ds| \leq k_4 \cdot k_5 \cdot e^{(k-k_1)t_1}.$$

Also folgt $\sup\{|X^Q(a, t_1-s)| \mid s \in [0, \tau]\} \leq k_4 \cdot k_5 \cdot e^{(k-k_1)t_1}.$

(3) Es bleibt noch X^Q im Punkt t_1 im Fall $\tau=0$ abzuschätzen. $\tau=0$ bedeutet, daß t_1 Unstetigkeitsstelle von X^Q ist. Wenn wir X^Q auf einem Intervall $[t_1-l+d, t_1+d]$ mit $d \in (0,1)$ betrachten, dann können wir die Ergebnisse von (1) und (2) verwenden. Wir erhalten mit (2):

$$\begin{aligned} |X^Q(a, t_1)| &\leq \\ &\leq \sup\{|X^Q(a, t_1+d-s)| \mid s \in [0, d]\} \leq k_4 \cdot k_5 \cdot e^{(k-k_1)(t_1+d)}. \end{aligned}$$

Weil $d \in (0,1)$ beliebig ist, erhalten wir

$$|X^Q(a, t_1)| \leq k_4 \cdot k_5 \cdot e^{(k-k_1)t_1}.$$

Da $t_1 \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig war, folgt aus (1) bis (3) für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $a \in J_1$

$$\sup\{|X^Q(a,s)| \mid s \in [t-1,t]\} \leq k_4 \cdot k_5 e^{(k-k_1)t}.$$

Zum Beweis der Behauptung für $\dot{X}^Q$ bedenken wir, daß X^Q die Differenzen-Differentialgleichung

$$\dot{X}^Q(a,t) - a \cdot \dot{X}^Q(a,t-1) = a \cdot (bX^Q(a,t) + c \cdot X^Q(a,t-1))$$

für $t \in (n-1, n)$ und $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Mit Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\dot{X}^Q(a,t) = a^n \cdot \dot{X}^Q(a,t-n) + \sum_{j=1}^n a^j (bX^Q(a,t-j+1) + cX^Q(a,t-j)).$$

Wir setzen $s_0 := \sup\{|\dot{X}^Q(a,s)| \mid s \in (-1,0), a \in J_1\}$. Aus der Abschätzung für X^Q erhalten wir für $t \in (n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$|\dot{X}^Q(a,t)| \leq s_0 |a^n| + \left(\sum_{j=1}^n |a^j| e^{-j(k-k_1)} \right) (|b| + |c|) \cdot k_4 k_5 e^{(k-k_1)(t+1)};$$

mit $k-k_1 > \sup\{\ln(|a|) \mid a \in J_1\} + k_1 \geq \ln(|a|) + k_1$ ist

$$|a^j| \cdot e^{-j(k-k_1)} \leq e^{-j \cdot k_1} \text{ für } j \in \mathbb{N};$$

für $t \in (n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}$ ist $e^{(k-k_1)t} \geq e^{t \ln(|a|)} \geq e^{n \ln(|a|)}$.

Es wird

$$|\dot{X}^Q(a,t)| \leq \{s_0 e^{-k+k_1} + k_4 k_5 (|b| + |c|) / (1 - e^{-k_1})\} e^{(k-k_1)(t+1)}.$$

Damit folgt leicht die Behauptung für $\dot{X}_t^Q$, $t \in \mathbb{R}_0^+$, und die Existenz des geforderten k_2 ist gezeigt.

Die Behauptung in b) erhält man durch einfache Rechnung mit Satz 3.2.2 (2), und der Satz ist vollständig bewiesen.

◇

Nun sind wir in der Lage, die Existenz invarianter Lösungsmannigfaltigkeiten für bestimmte Funktional-Differentialgleichungen zu zeigen.

3.3 Invariante Lösungsmannigfaltigkeiten

Bevor wir mit den eigentlichen Untersuchungen beginnen, skizzieren wir kurz eine übliche Vorgehensweise beim Existenzbeweis invarianter Lösungsmannigfaltigkeiten am Beispiel gewöhnlicher Differentialgleichungen. Dann geben wir im Vergleich dazu einen Überblick über die in diesem Abschnitt entwickelte neue Variante des Existenzbeweises, der für eine Klasse nichtlinearer Funktional-Differentialgleichungen gilt.

Gegeben seien Matrizen $A \in M_{n,n}$, $B \in M_{m,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$ und stetige Funktionen

$$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto f(x, y),$$

$$g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto g(x, y).$$

Eine invariante Lösungsmannigfaltigkeit für das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = Ax + f(x, y)$$

$$\dot{y} = By + g(x, y)$$

ist durch eine stetige Funktion $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben, wenn h folgende Eigenschaften besitzt:

Für jedes $(x_0, h(x_0)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ erfüllt die Lösung (x, y) des Differentialgleichungssystems mit dem Anfangswert $(0, (x_0, h(x_0))) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ die Gleichung $y(t) = h(x(t))$ für alle $t \geq 0$.

Mit anderen Worten:

Hat eine Lösung des Differentialgleichungssystems ihren Anfangswert in der Menge $\{(x_0, h(x_0)) \mid x_0 \in \mathbb{R}^n\}$, dann verläuft sie in dieser Menge für alle $t \geq 0$.

Die Bedeutung der invarianten Mannigfaltigkeit liegt darin, daß die in der Mannigfaltigkeit verlaufenden Lösungen der Differentialgleichung mit Hilfe der Lösungen der Gleichung

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x))$$

untersucht werden können.

Mit der invarianten Mannigfaltigkeit kann das Gleichungssystem entkoppelt und damit reduziert werden.

Für den Existenzbeweis der invarianten Mannigfaltigkeit benutzt man, daß die Lösungen der Gleichung

$$\dot{y} = By + g(x, y)$$

mit der Variation der Konstanten dargestellt werden können.

$$y(t) = e^{B(t-t_0)}(y_0 + \int_{t_0}^t e^{-B(s-t_0)} g(x(s), y(s)) ds), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Man betrachtet zu geeigneten $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+$ die Menge $\tilde{M}$ der Funktionen h , die folgende Eigenschaften haben.

$h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig; $h0 = 0$;

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist $|hx| < p_1$, $|hx - hy| < p_2|x - y|$.

Auf $\tilde{M}$ definiert man weiter einen Operator T .

$T: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$, $h \mapsto Th$,

$Th: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \mapsto \int_{-\infty}^0 e^{-Bs} g(x(s), h(x(s))) ds$;

dabei ist x die Lösung der Gleichung

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x))$$

zum Anfangswert $(0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Man überzeugt sich leicht davon, daß ein Fixpunkt von T gerade eine invariante Lösungsmannigfaltigkeit des Differentialgleichungssystems liefert.

Sind f und g stetig von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängig, dann fügt man nur die Gleichung $\dot{a} = 0$ dem System hinzu und verfährt mit dem erweiterten System wie im parameterfreien Fall.

Eine ausführliche Beschreibung dieser Beweismethode findet sich z.B. in [05].

Nun betrachten wir Funktional-Differentialgleichungen.
Gegeben seien $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ und die stetigen Abbildungen

$$f(a, \cdot): C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto f(a, \phi),$$

$$g(a, \cdot): C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto g(a, \phi),$$

$$D^0(a, \cdot): C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto \phi(0) - a\phi(-1) =: D(a, \phi),$$

$$F^0(a, \cdot): C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto a[b\phi(0) + c\phi(-1)] =: F(a, \phi).$$

Für die Gleichung

$$\frac{d}{dt}[D^0(a, y_t) - g(a, y_t)] = F^0(a, y_t) + f(a, y_t)$$

ergibt sich eine andere Situation als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

(1) Die Funktional-Differentialgleichung ist nicht durch eine Funktion von C nach C sondern durch eine Funktion von C nach $\mathbb{R}$ gegeben.

(2) Die Funktional-Differentialgleichung ist nicht auf einfache Weise in zwei Teilgleichungen zerlegbar.

(3) Aus Abschnitt 3.2 wissen wir aber, daß unter geeigneten Voraussetzungen Projektionen Π_a existieren, die C in die Teilräume $P := P_a := \Pi_a C$ und $Q := Q_a := (\text{id}_C - \Pi_a)C$ zerlegen. Darüber hinaus können wir mit Satz 3.2.7 die Lösungen in Komponenten aus P und Q zerlegen.

Wegen (1) können wir die Projektionen nicht auf die Funktional-Differentialgleichung anwenden, um so geeignete Teilgleichungen zu erhalten.

Aber statt dessen können wir, ähnlich wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen, die Integraldarstellung der Komponenten einer Lösung in P und Q benutzen.

Wir betrachten die Menge B_p der Abbildungen $h: C \rightarrow C$ mit den Eigenschaften

$$h0 = 0, \quad |h\phi - h\psi| \leq |\phi - \psi|, \quad |h\phi| \leq p,$$

für alle $\phi, \psi \in C$ und einem geeigneten p aus $\mathbb{R}^+$.

B_p ist eine Teilmenge von B_0 , den Lipschitz-stetigen Abbildungen $h: C \rightarrow C$ mit $h0 = 0$ und globaler Lipschitz-Konstante.

Mit der Norm $|h| = \sup\{|h\phi|/|\phi| \mid \phi \in C \setminus \{0\}\}$ für $h \in B_0$ ist B_p ein vollständiger metrischer Raum.

Da wir keine Teilgleichungen der Differentialgleichung zur Verfügung haben, betrachten wir zu $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $h \in B_p$ die Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[D^0(a, y_t) - g(a, \Pi_a y_t + (id_C - \Pi_a)h\Pi_a y_t)] &= \\ &= F^0(a, y_t) + f(a, \Pi_a y_t + (id_C - \Pi_a)h\Pi_a y_t); \end{aligned}$$

$\tilde{y}$ sei eine Lösung dieser Gleichung zum Anfangswert $(t_0, \phi^P + (id_C - \Pi_a)h\phi^P)$, $\phi^P = \Pi_a \phi$, $\phi \in C$.

Setzen wir

$$\tilde{g}(a, t) := g(a, \Pi_a \tilde{y}_t + (id_C - \Pi_a)h\Pi_a \tilde{y}_t),$$

$$\tilde{f}(a, t) := f(a, \Pi_a \tilde{y}_t + (id_C - \Pi_a)h\Pi_a \tilde{y}_t),$$

dann erhalten wir unter gewissen Voraussetzungen mit Satz 3.2.7

$$\tilde{y}_t^P = T^0(a, t-t_0)\phi^P + \int_{t_0}^t T^0(a, t-s)X_0^P[\tilde{f}(a, s)ds + d_s \tilde{g}(a, s)] .$$

$$\tilde{y}_t^Q = T^0(a, t-t_0)\phi^Q + \int_{t_0}^t T^0(a, t-s)X_0^Q[\tilde{f}(a, s)ds + d_s \tilde{g}(a, s)] .$$

Man kann wieder zeigen, daß für einen Fixpunkt $h \in B_p$ des Operators

$$S(a, \cdot): B_p \rightarrow B_p, \quad h \mapsto S(a, h),$$

$$S(a, h): C \rightarrow C, \quad \phi \mapsto \int_{-\infty}^0 T^0(a, t-s)X_0^Q[\tilde{f}(a, s)ds + d_s \tilde{g}(a, s)]$$

gilt: $\tilde{y}_t^Q = h\tilde{y}_t^P$ für alle $t \geq 0$.

Also induziert die Einschränkung von h auf P_a nach Q_a eine Abbildung $h|_{P_a}: P_a \rightarrow Q_a$, $\phi \mapsto h\phi$, die eine invariante Lösungsmannigfaltigkeit liefert.

Da $(id_C - \Pi_a)h|_{P_a} = h|_{P_a}$ und damit $y_t^P + hy_t^P = y_t$ ist, erhalten wir durch h auch eine invariante Lösungsmannigfaltigkeit für die Gleichung

$$\frac{d}{dt}[D^0(a, y_t) - g(a, y_t)] = F^0(a, y_t) + f(a, y_t).$$

Die stetige Abhängigkeit der invarianten Mannigfaltigkeit von a erhalten wir aus der Stetigkeit von $S(\cdot, h)$ in a für jedes $h \in B_p$ und nicht durch Hinzufügen einer weiteren Gleichung.

3.3.1 Satz (invariante Lösungsmannigfaltigkeiten)

Gegeben sei ein offenes Intervall $J \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $0 \notin \text{Rd} J$, $b, c \in \mathbb{R}$ und ein abgeschlossenes Intervall J_0 in J ; es sei $\sup\{|a| \mid a \in J\} < 1$.

Weiter seien für jedes $a \in J$ die Abbildungen

$$D^0(a, \cdot): C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto D^0(a, \phi) := \phi(0) - a \cdot \phi(-1),$$

$$F^0(a, \cdot): C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto F^0(a, \phi) := a[b \cdot \phi(0) + c \cdot \phi(-1)]$$

gegeben.

a) Zu der linearen Funktional-Differentialgleichung

$$(3.23) \quad \frac{d}{dt} D^0(a, y_t) = F^0(a, y_t)$$

ist die charakteristische Gleichung gegeben durch

$$\Delta(a, z) = z \cdot (1 - a \cdot e^{-z}) - a \cdot (b + c \cdot e^{-z}) = 0.$$

Es sei ein $k \in \mathbb{R}$ mit $0 > 2k > \sup\{\ln(|a|) \mid a \in J\}$ gegeben. Für jedes $a \in J$ gelte

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a, z) = 0\} =$$

$$= \{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a, z) = 0, |\operatorname{Re}(z)| < -k\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a, z) = 0, \operatorname{Re}(z) < 2k\}.$$

Für jedes $a \in J$ sei $W(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a, z) = 0, |\operatorname{Re}(z)| < -k\}$ gegeben durch $\omega_1(a), \omega_2(a) \in \mathbb{C}$; also $W(a) = \{\omega_1(a), \omega_2(a)\}$.

$\omega_1(a)$ und $\omega_2(a)$ seien Nullstellen erster Ordnung von $\Delta(a, \cdot)$.
 $\omega_i: J \rightarrow \mathbb{C}$, $a \mapsto \omega_i(a)$, $i=1,2$ seien stetig differenzierbare Funktionen.

b) Sei $\tilde{k} := (3/2)k$; für alle $a \in J$ ist $\tilde{k} \notin \text{cl}(\text{Re}(S(G_a)))$, und C ist für jedes $a \in J$ entsprechend Satz 3.2.2 mit den Projektionen $\Pi_{W(a)}$ in die Räume $P = P(a) = \Pi_{W(a)}C$ und $Q = Q(a) = (\text{id}_C - \Pi_{W(a)})C$ zerlegt. Es gibt eine Konstante $k_3 \in \mathbb{R}^+$, $k_3 > 1$ mit

$|\Pi_{W(a)}| \leq k_3$ und $|\Pi_{W(a)} - \Pi_{W(b)}| \leq k_3|a-b|$ für alle $a, b \in J_0$;

auf den Räumen $P(a)$ und $Q(a)$ sollen für alle $a \in J_0$ die folgenden Abschätzungen mit von a unabhängigen $k_2 \in \mathbb{R}^+$, $k_2 > 1$ und $r_0 \in \mathbb{R}^+$ gelten:

$$|T^0(a, t)\phi^P| \leq k_2 \cdot e^{r_0|t|} \cdot |\phi^P|, \quad \phi^P \in P(a),$$

$$|\dot{X}_t^P(a)| \leq k_2 \cdot e^{r_0|t|}, \quad |\dot{X}_t^P(a)| \leq k_2 \cdot e^{r_0|t|}, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$|T^0(a, t)\phi^Q| \leq k_2 \cdot e^{kt} \cdot |\phi^Q|, \quad \phi^Q \in Q(a),$$

$$|\dot{X}_t^Q(a)| \leq k_2 \cdot e^{kt}, \quad |\dot{X}_t^Q(a)| \leq k_2 \cdot e^{kt}, \quad \text{für } t \in \mathbb{R}_0^+.$$

c) Gegeben seien die stetigen Abbildungen

$$f: C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto f(\phi), \quad g: C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto g(\phi)$$

mit $f(0) = g(0) = 0$.

Es gebe $\epsilon, q \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $\phi^P, \psi^P \in P(a)$, $\phi^Q, \psi^Q \in Q(a)$ mit $|\phi^Q|, |\psi^Q| \leq \epsilon$ und alle $a \in J$ gelte:

$$(i) \quad |f(\phi^P + \phi^Q)| < \epsilon \cdot q, \quad |g(\phi^P + \phi^Q)| < \epsilon \cdot q;$$

$$(ii) \quad |f(\phi^P + \phi^Q) - f(\psi^P + \psi^Q)| \leq q \cdot (|\phi^P - \psi^P| + |\phi^Q - \psi^Q|);$$

$$(iii) \quad |g(\phi^P + \phi^Q) - g(\psi^P + \psi^Q)| \leq q \cdot (|\phi^P - \psi^P| + |\phi^Q - \psi^Q|).$$

Die Voraussetzungen (ii) und (iii) liefern für hinreichend kleines q und $\phi, \psi \in C$ mit hinreichend kleiner Projektion in Q gerade die Forderungen der Sätze 3.1.5 und 3.1.7 an die Kontraktionseigenschaft von f und g bzgl. $\phi, \psi \in C$.

Betrachten wir Lösungen einer Funktional-Differentialgleichung mit den Nichtlinearitäten f und g , deren Projektionen in Q klein bleiben, dann werden wir Aufschluß über die Existenz und Eindeutigkeit und das Wachstumsverhalten dieser Lösungen mit den Sätzen 3.1.5 und 3.1.7 erhalten. Insbesondere gilt das für Lösungen, wenn sie in einer invarianten Lösungsmannigfaltigkeit, die durch eine hinreichend stark beschränkte Abbildung $h: P \rightarrow Q$ gegeben ist, verlaufen.

d) Sei $a_0 := \sup\{|a|+1, \frac{1}{|a|} \mid a \in J\}$, $k_4 := 4(k_3+k_3^2)$.

$$k_5 := \max\{\max\{|X_0^P(a)| \cdot (2+k_3) \mid a \in J_0\}, 2(k_3+2)k_2\}.$$

Die Konstanten sollen folgenden Abschätzungen genügen:

$$(i) \quad qk_4 \cdot a_0 < 1, \quad r_1 := k + 4qk_5 + r_0 < 0;$$

$$(ii) \quad \tilde{k}_6 := k_2 l_6 q (2+k_3) k_2 k_3 \cdot \{1 + [e^{(4qk_5+r_0)} / (1-e^{r_1})] - 2\frac{1}{r_1}\},$$

$$\max\{qk_5, \tilde{k}_6\} < \frac{1}{2};$$

$$(iii) \quad k_2 \cdot q [1 - 2\frac{1}{k} + (1-e^k)^{-1}] < \frac{1}{\epsilon} p < (1+k_3)^{-1}.$$

Unter diesen Voraussetzungen gibt es eine Abbildung

$$h: J_0 \rightarrow B_p, \quad a \mapsto h(a)$$

mit folgenden Eigenschaften:

h ist bezüglich der Norm $|h(a)| = \sup\{|h(a)\phi|/|\phi| \mid \phi \in C \setminus \{0\}\}$ eine stetige Abbildung; für $a \in J_0$ liefert die induzierte Abbildung $h(a)|_{P(a)}: P(a) \rightarrow Q(a)$ eine positive invariante Lösungsmannigfaltigkeit für die Funktional-Differentialgleichung

$$(3.24) \quad \frac{d}{dt} D(a, y_t) = F(a, y_t).$$

Dabei ist für jedes $a \in J_0$

$$D(a, \cdot): C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto D(a, \phi) := D^0(a, \phi) - a \cdot g(\phi),$$

$$F(a, \cdot): C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto F(a, \phi) := F^0(a, \phi) + a \cdot f(\phi).$$

Ist y eine Lösung von (3.24) zu einem Anfangswert $(0, \phi) = (0, \phi^P + h(a)\phi^P)$ mit $\phi^P \in P(a)$, dann erfüllt y_t für $t \geq 0$ die Gleichung $y_t = y_t^P + h(a)y_t^P$; y_t ist also durch y_t^P und $h(a)$ für $t \geq 0$ gegeben.

Beweis:

Wir werden einen geeigneten Operator $S : J_0 \times B_p \rightarrow B_p$ definieren und zeigen, daß dieser genau einen von a stetig abhängenden Fixpunkt $h(a)$ besitzt. Dieser Fixpunkt liefert dann die gesuchte invariante Mannigfaltigkeit.

Zunächst betrachten wir zu jedem $(a, h) \in J_0 \times B_p$ die Abbildungen

$$\tilde{D}(a, \cdot) : C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto \tilde{D}(a, \phi),$$

$$\tilde{D}(a, \phi) := D^0(a, \phi) - a \cdot g(\pi_{W(a)} \phi + (id_C - \pi_{W(a)}) h \pi_{W(a)} \phi).$$

$$\tilde{F}(a, \cdot) : C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto \tilde{F}(a, \phi),$$

$$\tilde{F}(a, \phi) := F^0(a, \phi) + a \cdot f(\pi_{W(a)} \phi + (id_C - \pi_{W(a)}) h \pi_{W(a)} \phi)$$

und die Lösungen der Funktional-Differentialgleichung

$$(3.25) \quad \frac{d}{dt} \tilde{D}(a, y_t) = \tilde{F}(a, y_t).$$

(1) Für die Lösungen von (3.25) gelten die Sätze 3.1.5 und 3.1.7.

Beweis:

Wir zeigen:

Es sind die Abschätzungen (3.9) aus Satz 3.1.7 erfüllt.

Sei $(a_i, \phi_i, h_i) \in J \times C \times B_p$, $\phi_i^P := \pi_{W(a_i)} \phi_i$, $i=1,2$ und

$$g_{a_i} := g(\phi_i^P + (id_C - \pi_{W(a_i)}) h_i \phi_i^P);$$

wegen d) (iii) und $h_i \in B_p$, $i=1,2$ erhalten wir

$$|(id_C - \pi_{W(a_i)}) h_i \phi_i^P| \leq (1+k_3)p < \epsilon;$$

also können wir die Abschätzungen aus c) benutzen, um g_{a_1} , g_{a_2} und $g_{a_1} - g_{a_2}$ abzuschätzen.

Wir erhalten:

aus c) (iii)

$$|g_{a_1} - g_{a_2}| \leq q|\phi_1^P - \phi_2^P| + q|h_1\phi_1^P - h_2\phi_2^P| + q|\pi_{W(a_1)}h_1\phi_1^P - \pi_{W(a_2)}h_2\phi_2^P|;$$

aus b)

$$\begin{aligned} |\phi_1^P - \phi_2^P| &\leq |a_1 - a_2|k_3|\phi_1| + k_3|\phi_1 - \phi_2|; \\ |h_1\phi_1^P - h_2\phi_2^P| &\leq |h_1 - h_2|k_3|\phi_1| + |a_1 - a_2|k_3|\phi_1| + k_3|\phi_1 - \phi_2|; \\ |\pi_{W(a_1)}h_1\phi_1^P - \pi_{W(a_2)}h_2\phi_2^P| &\leq k_3|a_1 - a_2|k_3|\phi_1| + k_3|h_1\phi_1^P - h_2\phi_2^P|; \end{aligned}$$

aus c) (iii)

$$\begin{aligned} |g_{a_1}| &\leq q\{|\phi_1^P| + |(\text{id}_c - \pi_{W(a_1)})h_1\phi_1^P|\} \leq \\ &\leq q[k_3 + (1+k_3)k_3]|\phi_1| \leq 2qk_3(1+k_3)|\phi_1|; \end{aligned}$$

damit wird

$$|a_1 \cdot g_{a_1} - a_2 \cdot g_{a_2}| \leq |a_1 - a_2|2qk_3(1+k_3)|\phi_1| + |a_2||g_{a_1} - g_{a_2}|;$$

wegen $|a_2| \leq 1$ und d) folgt

$$\begin{aligned} |a_1 \cdot g(\phi_1^P + [\text{id}_c - \pi_{W(a_1)}]h_1\phi_1^P) - \\ - a_2 \cdot g(\phi_2^P + [\text{id}_c - \pi_{W(a_2)}]h_2\phi_2^P)| \leq \\ \leq q \cdot k_4 \cdot [|a_1 - a_2| \cdot |\phi_1| + |h_1 - h_2| \cdot |\phi_1| + |\phi_1 - \phi_2|]; \end{aligned}$$

für f ergeben sich die entsprechenden Abschätzungen.

Da wir ϕ_1 und ϕ_2 miteinander vertauschen können, bleiben die Abschätzungen auch dann richtig, wenn wir $|\phi_1|$ durch $\min\{|\phi_1|, |\phi_2|\}$ ersetzen.

Setzen wir $q_1 := qk_4$, $L := qk_4 + |b| + |c|$ und $l_0 := 0$, dann ist wegen d) (i) $q_1 < 1$ und $q_1 a_0 < 1$. Das zeigt, daß die in 3.1.5 und 3.1.7 geforderten Abschätzungen erfüllt sind. Damit gelten die Sätze 3.1.5 und 3.1.7 für (3.25).

Sei $(a_i, \phi_i, h_i) \in J \times C \times B_p$ und $y(\cdot, a_i, \phi_i, h_i)$ die Lösung von (3.25) zu den Gleichungsparametern a_i , h_i und dem Anfangswert $(t_0, \phi_i) \in \mathbb{R} \times C$ mit $i=1,2$.

Zur Abkürzung setzen wir $y_t^P(i) := \Pi_{W(a_i)} y_t(a_i, \phi_i, h_i)$, $i=1,2$;

$$f_i(t) := a_i \cdot f(y_t^P(i) + [id_c - \Pi_{W(a_i)}] h_i y_t^P(i)),$$

$$g_i(t) := a_i \cdot g(y_t^P(i) + [id_c - \Pi_{W(a_i)}] h_i y_t^P(i)), \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

(2) Wir betrachten (3.25) zu jedem fixen $a \in J_0$ und setzen $a_1 = a_2 = a$.

Für jedes $(\phi_1, h_1), (\phi_2, h_2) \in C \times B_p$ und alle $a \in J_0$ gilt:

$$(3.26) \quad |\Pi_{W(a)} y_t(a, \phi_1, h_1) - \Pi_{W(a)} y_t(a, \phi_2, h_2)| \leq \\ \leq 4 \cdot k_2 \cdot (3|h_1 - h_2| \cdot |\phi_1^P| + |\phi_1^P - \phi_2^P|) \cdot e^{(4qk_5 + r_0)|t - t_0|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beweis:

Mit Satz 3.2.7 ergibt sich für $t \geq t_0$

$$y_t^P(i) = T^0(t - t_0) y_{t_0}^P(i) + \int_{t_0}^t T^0(t-s) X_0^P(dg_i(s) + f_i(s) ds) = \\ = T^0(t - t_0) y_{t_0}^P(i) + X_0^P \cdot g_i(t) - T^0(t - t_0) X_0^P \cdot g_i(t_0) + \\ + \int_{t_0}^t T^0(t-s) (X_0^P \cdot f_i(s) + \dot{X}_0^P \cdot g_i(s)) ds;$$

da für alle $\phi \in C$ $|[id_c - \Pi_{W(a_i)}] h_i \Pi_{W(a_i)} \phi| \leq \epsilon$ gilt, erhalten wir für die Differenzen von f_i und g_i mit c) (ii) und (iii) für alle $t \in \mathbb{R}$ die Abschätzungen

(3.27)

$$|g_1(t) - g_2(t)| \leq q \cdot (2 + k_3) \cdot (|y_t^P(1) - y_t^P(2)| + |h_1 - h_2| \cdot |y_t^P(1)|),$$

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq q \cdot (2 + k_3) \cdot (|y_t^P(1) - y_t^P(2)| + |h_1 - h_2| \cdot |y_t^P(1)|).$$

Für $t \geq t_0$ ergibt sich so mit d) (ii), b) und (3.27)

$$|y_t^P(1) - y_t^P(2)| \leq \\ \leq 2k_2 \cdot (|y_{t_0}^P(1) - y_{t_0}^P(2)| + |h_1 - h_2| \cdot |y_{t_0}^P(1)|) \cdot e^{(t - t_0)r_0} + \\ + |X_0^P| \cdot q \cdot (2 + k_3) \cdot (|y_t^P(1) - y_t^P(2)| + |h_1 - h_2| \cdot |y_t^P(1)|) + \\ + qk_5 \cdot \int_{t_0}^t e^{r_0(t-s)} \cdot (|y_s^P(1) - y_s^P(2)| + |h_1 - h_2| \cdot |y_s^P(1)|) ds;$$

für $\phi_1 = 0$ folgt wegen $k_3, k_2 > 1$, d) (ii) und $k_5 \geq |X_0^P|(2+k_3)$

$$|y_t^P(2)| \leq 4k_2 |y_{t_0}^P(2)| e^{r_0(t-t_0)} + 2qk_5 \int_{t_0}^t e^{r_0(t-s)} |y_s^P(2)| ds,$$

und mit dem Lemma von Gronwall ergibt sich

$$|y_t^P(2)| \leq 4k_2 \cdot |y_{t_0}^P(2)| e^{(2k_5 \cdot q + r_0) \cdot (t-t_0)}.$$

Die gleiche Abschätzung gilt entsprechend für $y_t^P(1)$, und es wird

$$\begin{aligned} |y_t^P(1) - y_t^P(2)| &\leq \\ &\leq 4k_2 \cdot (|y_{t_0}^P(1) - y_{t_0}^P(2)| + |h_1 - h_2| \cdot |y_{t_0}^P(1)|) \cdot e^{(t-t_0)r_0} + \\ &\quad + 2|X_0^P| \cdot q \cdot (2+k_3) \cdot |h_1 - h_2| \cdot 4k_2 |y_{t_0}^P(1)| e^{(2qk_5 + r_0)(t-t_0)} + \\ &\quad + 2q \cdot k_5 \cdot \int_{t_0}^t e^{r_0(t-s)} \cdot |y_s^P(1) - y_s^P(2)| ds + \\ &\quad + 2qk_5 (2qk_5)^{-1} |h_1 - h_2| \cdot 4k_2 |y_{t_0}^P(1)| e^{(2qk_5 + r_0)(t-t_0)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y_t^P(1) - y_t^P(2)| &\leq \\ &\leq 4k_2 e^{(2qk_5 + r_0)(t-t_0)} \cdot [|y_{t_0}^P(1) - y_{t_0}^P(2)| + 3|h_1 - h_2| |y_{t_0}^P(1)|] + \\ &\quad + 2qk_5 \int_{t_0}^t e^{(2qk_5 + r_0)(t-s)} |y_s^P(1) - y_s^P(2)| ds; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y_t^P(1) - y_t^P(2)| &\leq \\ &\leq 4k_2 e^{(4qk_5 + r_0)(t-t_0)} \cdot [|y_{t_0}^P(1) - y_{t_0}^P(2)| + 3|h_1 - h_2| |y_{t_0}^P(1)|]. \end{aligned}$$

Auf dem Unterraum $P = P(a)$ sind die Lösungsoperatoren nach Satz 3.2.2 (2) auch für $-(t-t_0) \leq 0$ definiert, so daß wir auf $y_t^P(i) \in P(a)$ den Operator $T^0(-(t-t_0))$ anwenden können. Dies liefert uns mit dem Lemma von Gronwall auch eine Abschätzung der Differenzen für $t_0 \leq t$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} y_{t_0}^P(i) &= T^0(t_0-t) y_t^P(i) - \int_{t_0}^t T^0(t_0-s) X_0^P (dg_i(s) + f_i(s) ds) = \\ &= T^0(t_0-t) y_t^P(i) + X_0^P \cdot g_i(t_0) - T^0(t_0-t) X_0^P \cdot g_i(t) - \\ &\quad - \int_{t_0}^t T^0(t_0-s) (X_0^P \cdot f_i(s) + \dot{X}_0^P \cdot g_i(s)) ds. \end{aligned}$$

Für $t \geq t_0$ ergibt sich so mit d) (ii), b) und (3.27)

$$\begin{aligned} & |y_{t_0}^P(1) - y_{t_0}^P(2)| \leq \\ & \leq 2k_2 \cdot (|y_t^P(1) - y_t^P(2)| + |h_1 - h_2| \cdot |y_t^P(1)|) \cdot e^{(t-t_0)r_0} + \\ & + |x_0^P| \cdot q \cdot (2+k_3) \cdot (|y_{t_0}^P(1) - y_{t_0}^P(2)| + |h_1 - h_2| \cdot |y_{t_0}^P(1)|) + \\ & + qk_5 \cdot \int_{t_0}^t e^{r_0(s-t_0)} \cdot (|y_s^P(1) - y_s^P(2)| + |h_1 - h_2| \cdot |y_s^P(1)|) ds; \end{aligned}$$

für $\phi_1 = 0$ folgt wegen $k_3, k_2 > 1$, d) (ii) und $k_5 \geq |x_0^P| (2+k_3)$

$$|y_{t_0}^P(2)| \leq 4k_2 |y_{t_0}^P(2)| e^{r_0(t-t_0)} + 2qk_5 \int_{t_0}^t e^{r_0(s-t_0)} |y_s^P(2)| ds,$$

und mit Folgerung 3.1.4 zum Lemma von Gronwall erhalten wir

$$|y_{t_0}^P(2)| \leq 4k_2 \cdot |y_{t_0}^P(2)| e^{(2k_5 \cdot q + r_0) \cdot (t-t_0)}.$$

Die gleiche Abschätzung gilt entsprechend für $y_{t_0}^P(1)$, und es wird

$$\begin{aligned} & |y_{t_0}^P(1) - y_{t_0}^P(2)| \leq \\ & \leq 4k_2 \cdot (|y_t^P(1) - y_t^P(2)| + |h_1 - h_2| \cdot |y_t^P(1)|) \cdot e^{(t-t_0)r_0} + \\ & + 2|x_0^P| \cdot q \cdot (2+k_3) \cdot |h_1 - h_2| \cdot 4k_2 |y_{t_0}^P(1)| e^{(2qk_5 + r_0)(t-t_0)} + \\ & + 2q \cdot k_5 \cdot \int_{t_0}^t e^{r_0(s-t_0)} \cdot |y_s^P(1) - y_s^P(2)| ds + \\ & + 2qk_5 (2qk_5)^{-1} |h_1 - h_2| \cdot 4k_2 |y_{t_0}^P(1)| e^{(2qk_5 + r_0)(t-t_0)}; \\ & |y_{t_0}^P(1) - y_{t_0}^P(2)| \leq \\ & \leq 4k_2 \cdot e^{(2qk_5 + r_0)(t-t_0)} [|y_{t_0}^P(1) - y_{t_0}^P(2)| + 3|h_1 - h_2| |y_{t_0}^P(1)|] + \\ & + 2qk_5 \int_{t_0}^t e^{(2qk_5 + r_0)(s-t_0)} |y_s^P(1) - y_s^P(2)| ds; \end{aligned}$$

Folgerung 3.1.4 liefert wieder

$$\begin{aligned} & |y_{t_0}^P(1) - y_{t_0}^P(2)| \leq \\ & \leq 4k_2 e^{(4qk_5 + r_0)(t-t_0)} (3|h_1 - h_2| |y_{t_0}^P(1)| + |y_{t_0}^P(1) - y_{t_0}^P(2)|). \end{aligned}$$

Vertauschen wir die Bezeichnungen t und t_0 , dann folgt die Behauptung aus (2) für $t \leq t_0$.

(3) Nachdem wir Aufschluß über das Wachstumsverhalten von y_t^P erhalten haben, wollen wir jetzt das Langzeitverhalten von y_t^Q studieren. Wir betrachten zu festem $a \in J_0$, $t \leq t_1 \leq 0$ und stetigen Funktionen $f_0, g_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folgende Integrale:

$$\text{INT}(t_1, t, g_0, f_0) := \int_t^{t_1} T^0(a, -s) \dot{x}_0^Q(ds) + f_0(s) ds.$$

Diese Integrale sind wohldefiniert; betrachten wir die Lösung $y(\cdot, t_1, 0)$ bzw. $y(\cdot, t, 0)$ mit dem Anfangswert $(t_1, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ bzw. $(t, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ der Gleichung

$$\frac{d}{dt}[D^0(y_t) - g_0(t)] = F^0(y_t) + f_0(t),$$

dann gilt wegen Satz 3.2.7

$$\text{INT}(t_1, t, g_0, f_0) = y_0^Q(t_1, 0) - y_0^Q(t, 0) \in \mathbb{C}.$$

x^Q ist außerdem auf den Intervallen $[n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}_0$ stetig differenzierbar; damit folgt nach partieller Integration des Stieltjes-Integrals für $\theta \in [-1, 0]$

$$\begin{aligned} \text{INT}(t_1, t, g_0, f_0)(\theta) &= \\ &= T^0(a, -t_1) \dot{x}_0^Q(\theta) g_0(t_1) - T^0(a, -t) \dot{x}_0^Q(\theta) g_0(t) + \\ &+ \int_t^{t_1} T^0(a, -s) [\dot{x}_0^Q(\theta) f_0(s) + \dot{x}_0^Q(\theta) g_0(s)] ds - \\ &- \sum_{n \in \mathbb{N}_0, n(-t_1+\theta, -t+\theta)} [x^Q(n^+) - x^Q(n^-)] g_0(-n+\theta). \end{aligned}$$

(Zur Berechnung des Stieltjes-Integrals vgl. [12] S.98)

Mit den Abschätzungen für x^Q , $\dot{x}^Q$ aus b), $x^Q(n^+) - x^Q(n^-) = x(n^+) - x(n^-) = a^n$ aus Satz 3.2.3 und $|a| < e^k$ folgt mit $I := I(t_1, t) := \mathbb{N}_0 \cap [-t_1-1, -t]$ die Abschätzung (3.28)

$$\begin{aligned} |\text{INT}(t_1, t, g_0, f_0)| &\leq k_2 [e^{-kt_1} |g_0(t_1)| + e^{-kt} |g_0(t)|] + \\ &+ k_2 \int_t^{t_1} e^{-ks} (|g_0(s)| + |f_0(s)|) ds + \\ &+ \sum_{n \in I} e^{kn} \sup\{|g_0(-n+\theta)| \mid \theta \in [-1, 0]\}. \end{aligned}$$

(3a) Wir zeigen: $\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{INT}(0, t, g_i, f_i)$ existiert in $\mathbb{C}$, und für

$t \in \mathbb{R}$, $t \rightarrow -\infty$ konvergiert $|\text{INT}(0, t, g_i, f_i)| / |\Phi_i|$ gleichmäßig in $(a_i, \Phi_i, h_i) \in J_0 \times \mathbb{C} \times B_P$, $i \in \{1, 2\}$.

Beweis:

Für $g_i(t)$ und $f_i(t)$, $i \in \{1, 2\}$ erhalten wir mit den Abschätzungen (3.26) und (3.27) aus (2) mit $t \leq t_0 = 0$

$$|g_i(t)| \leq q(2+k_3) \cdot 4k_2 e^{-(4qk_5+r_0)t} |\phi_i^P|,$$

$$|f_i(t)| \leq q(2+k_3) \cdot 4k_2 e^{-(4qk_5+r_0)t} |\phi_i^P|;$$

wegen $r_1 = k + 4qk_5 + r_0 < 0$ und (3.28) folgt, daß für festes $i \in \{1, 2\}$ und jede Nullfolge $t_k \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}$ die Folge $\text{INT}(0, -\frac{1}{t_k}, g_i, f_i)$, $k \in \mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge in C ist. Damit ist die Existenz von $\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{INT}(0, t, g_i, f_i) \in C$ gezeigt. Wegen $|\phi_i^P| \leq k_3 |\phi_i|$ ergibt sich der zweite Teil der Behauptung von (3a).

(3b) $|g_i(t)|, |f_i(t)| \leq \epsilon \cdot q$ für $i \in \{1, 2\}$, d) (iii) und (3.28) liefern $\lim_{t \rightarrow -\infty} |\text{INT}(0, t, g_i, f_i)| \leq k_2 [1 - 2\frac{1}{k} + (1 - e^k)^{-1}] \cdot \epsilon \cdot q < p$.

(3c) Wir setzen mit $a_1 = a_2 \in J_0$, $\phi_1, \phi_2 \in C$, $h_1, h_2 \in E_p$ für $t \leq t_0 = 0$

$$g_0(t) := g_1(t) - g_2(t) \text{ und } f_0(t) := f_1(t) - f_2(t)$$

und zeigen

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} |\text{INT}(0, t, g_0, f_0)| &< \\ &< (2k_3)^{-1} \cdot [|\phi_1^P - \phi_2^P| + |h_1 - h_2| \cdot \min\{|\phi_1^P|, |\phi_2^P|\}] . \end{aligned}$$

Beweis:

Mit den Abschätzungen (3.26) und (3.27) aus (2) erhalten wir hier

$$\begin{aligned} |g_0(t)| &\leq q(2+k_3) [|y_t^P(1) - y_t^P(2)| + |h_1 - h_2| |y_t^P(1)|] \leq \\ &\leq q(2+k_3) \{ 4k_2 [3|h_1 - h_2| |\phi_1^P| + |\phi_1^P - \phi_2^P|] + \\ &\quad + 4k_2 |h_1 - h_2| |\phi_1^P| \} e^{(4qk_5+r_0)|t|} \leq \\ &\leq 16q(2+k_3) k_2 [|h_1 - h_2| |\phi_1^P| + |\phi_1^P - \phi_2^P|] \cdot e^{(4qk_5+r_0)|t|}; \end{aligned}$$

da wir ϕ_1^P mit ϕ_2^P vertauschen können, gilt die Abschätzung auch mit $\min\{|\phi_1^P|, |\phi_2^P|\}$ anstatt mit $|\phi_1^P|$; für f_0 erhalten wir die entsprechende Abschätzung.

Mit d) (ii) und (3.28) folgt die Behauptung von (3c).

(3d) Nun untersuchen wir die Abhängigkeit der Integrale von $a \in J_0$. Wir zeigen: Zu jedem $t \in \mathbb{R}$, $t \leq t_0 = 0$, gibt es eine Konstante $k(t) \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $a_1, a_2 \in J_0$, $h_1 = h_2 = h \in B_p$, $\phi \in C$ mit

$$\phi_i := \prod_{W(a_i)} \phi + (\text{id}_C - \prod_{W(a_i)}) h \prod_{W(a_i)} \phi, \quad i=1,2.$$

gilt:

$$|\text{INT}(0, t, g_1, f_1) - \text{INT}(0, t, g_2, f_2)| \leq k(t) |a_1 - a_2| |\phi|.$$

Beweis:

$$\text{Es ist } \text{INT}(0, t, g_i, f_i) = \int_t^0 T^0(a_i, -s) X_0^Q (dg_i(s) + f_i(s) ds);$$

damit wird für $t \leq 0$ $\text{INT}(0, t, g_i, f_i) = \phi_i^Q - T^0(a_i, -t) y_t^Q(i)$ mit $y_t^Q(i) = (\text{id}_C - \prod_{W(a_i)}) y_t(a_i, \phi_i, h_i)$, $i=1,2$;

es folgt

$$\begin{aligned} & |\text{INT}(0, t, g_1, f_1) - \text{INT}(0, t, g_2, f_2)| \leq \\ & \leq |\phi_1^Q - \phi_2^Q| + |T^0(a_1, -t) - T^0(a_2, -t)| |y_t^Q(1)| + \\ & \quad + |T^0(a_2, -t)| |y_t^Q(1) - y_t^Q(2)|. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} |\phi_1^Q - \phi_2^Q| & \leq k_3 |a_1 - a_2| |\phi| + k_3 |a_1 - a_2| k_3 |\phi| + k_3 |a_1 - a_2| k_3 |\phi| = \\ & = k_3 (1 + 2k_3) |a_1 - a_2| |\phi|, \end{aligned}$$

$$|\phi_1 - \phi_2| \leq 2k_3 (1 + k_3) |a_1 - a_2| |\phi|.$$

Für die Lösungen der Gleichung (3.23) gilt Satz 3.1.7 b) mit $l_0 = 0$. Damit ergibt sich

$$|T^0(a_1, t)\phi - T^0(a_2, t)\phi| \leq k_6 |\phi| |a_1 - a_2| e^{k_7 t}$$

für alle $\phi \in C$ und $t \geq 0$ mit $k_6, k_7 \in \mathbb{R}^+$.

Nach (1) gilt für $y_t(i) := y_t(a_i, \phi_i, h_i)$, $i=1,2$ ebenfalls Satz 3.1.7 b) mit $l_0 = 0$.

Es ist deshalb mit $k_8, k_9 \in \mathbb{R}^+$ und $t \leq 0$

$$|y_t(1) - y_t(2)| \leq k_8 [\min\{|\phi_1|, |\phi_2|\} |a_1 - a_2| + |\phi_1 - \phi_2|] e^{-k_9 t}.$$

Ohne Einschränkung können wir $k_6 \geq k_8$ und $k_7 \geq k_9$ annehmen. Damit wird

$$\begin{aligned} |T^0(a_1, -t) - T^0(a_2, -t)| \cdot |y_t^Q(1)| &\leq \\ &\leq k_6 |a_1 - a_2| e^{-k_7 t} \cdot \|id_C - \Pi_{W(a_1)}\| k_6 |\phi_1| e^{-k_7 t} \leq \\ &\leq k_6^2 e^{-2k_7 t} \cdot (1+k_3) \cdot (k_3 + (1+k_3)k_3) |\phi| |a_1 - a_2| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |T^0(a_2, -t)| |y_t^Q(1) - y_t^Q(2)| &\leq \\ &\leq k_6 e^{-k_7 t} [\|id_C - \Pi_{W(a_1)}\| |y_t(1) - y_t(2)| + \\ &\quad + \|\Pi_{W(a_1)} - \Pi_{W(a_2)}\| |y_t(2)|] \leq \\ &\leq k_6 e^{-k_7 t} [(1+k_3)k_6 (\min\{|\phi_1|, |\phi_2|\} |a_1 - a_2| + |\phi_1 - \phi_2|) e^{-k_7 t} + \\ &\quad + k_3 |a_1 - a_2| k_6 e^{-k_7 t} |\phi_2|]. \end{aligned}$$

Für $i=1,2$ ist $|\phi_i| \leq (2+k_3)k_3 |\phi|$. Damit folgt die Behauptung von (3d).

Nun betrachten wir zu $t \in \mathbb{R}$, $t \leq 0$ und $(a, h) \in J_0 \times B_p$ folgende Abbildung:

$$S_t(a, h): C \rightarrow C, \quad \phi \mapsto \int_t^0 T^0(a, -s) X_0^Q(d\tilde{g}(s, a, \phi, h) + \tilde{f}(s, a, \phi, h) ds)$$

mit

$$\tilde{g}(t, a, \phi, h) := ag(\Pi_{W(a)} y_t + (id_C - \Pi_{W(a)}) h \Pi_{W(a)} y_t),$$

$$\tilde{f}(t, a, \phi, h) := af(\Pi_{W(a)} y_t + (id_C - \Pi_{W(a)}) h \Pi_{W(a)} y_t).$$

$$y_t := y_t(a, \Pi_{W(a)} \phi + (id_C - \Pi_{W(a)}) h \Pi_{W(a)} \phi, h)$$

ist durch die Lösung y von (3.25) zum Anfangswert $(0, \phi_0) \in \mathbb{R} \times C$ mit $\phi_0 := \Pi_{W(a)} \phi + (id_C - \Pi_{W(a)}) h \Pi_{W(a)} \phi$, $\phi \in C$ und den Gleichungsparametern $(a, h) \in J_0 \times B_p$ gegeben.

(4a) Für $h \in B_p$ ist die Abbildung

$$S(\cdot, h): J_0 \rightarrow B_0, \quad a \mapsto \lim_{t \rightarrow -\infty} S_t(a, h) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{INT}(0, t, \tilde{g}, \tilde{f}) =: S(a, h)$$

wohldefiniert und bezüglich der Norm

$$|S(a, h)| = \sup\{|S(a, h)\phi| / |\phi| \mid \phi \in C \setminus \{0\}\}$$

stetig.

Beweis:

Mit dem unter (3) gezeigten existiert $\lim_{t \rightarrow -\infty} S_t(a, h)\phi$ für jedes $\phi \in C$.

Damit ist $S(a, h)$ wohldefiniert. Sei $\epsilon_0 > 0$, $h \in B_p$ gegeben. Zu $\frac{1}{3}\epsilon_0 > 0$ gibt es mit (3a) und $\phi_0^P = \prod_{W(a)} \phi_0 = \prod_{W(a)} \phi = \phi^P$ ein $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_1 < 0$, so daß für alle $t \leq t_1$, alle $a_i \in J_0$, $i=1,2$ und alle $\phi \in C$ gilt:

$$|S_t(a_i, h)\phi - S(a_i, h)\phi| \leq \frac{1}{3}\epsilon_0 |\phi|, \quad i=1,2.$$

Nach (3d) gibt es zu t_1 ein $k(t_1) \in \mathbb{R}^+$, so daß für $a_i \in J_0$, $i=1,2$

$$|S_{t_1}(a_1, h)\phi - S_{t_1}(a_2, h)\phi| \leq |a_1 - a_2| k(t_1) |\phi|$$

gilt. Wählen wir $d := \epsilon_0 / (3k(t_1))$, und ist $|a_1 - a_2| < d$, dann wird

$$\begin{aligned} |S(a_1, h)\phi - S(a_2, h)\phi| &\leq |S(a_1, h)\phi - S_{t_1}(a_1, h)\phi| + \\ &+ |S_{t_1}(a_1, h)\phi - S_{t_1}(a_2, h)\phi| + |S_{t_1}(a_2, h)\phi - S(a_2, h)\phi| \leq \epsilon_0 |\phi|. \end{aligned}$$

Das ist die Behauptung.

(4b) Nun zeigen wir: $S(a, h) \in B_p$.

Beweis:

(i) Für $a_1 = a_2 = a \in J_0$, $h_1 = h_2 = h \in B_p$ und $\phi, \psi \in C$ wird mit (3c) und $\phi_0^P = \phi^P$, $\psi_0^P = \psi^P$:

$$|S(a, h)\phi - S(a, h)\psi| \leq (2k_3)^{-1} |\phi^P - \psi^P| \leq \frac{1}{2} |\phi - \psi|.$$

(ii) Für alle $(a, h, \phi) \in J_0 \times B_p \times C$ folgt mit (3b) $|S(a, h)\phi| < p$.

(iii) $S(a, h)0 = 0$ ist klar.

(4c) Schließlich beweisen wir, daß $S(a, \cdot): B_p \rightarrow B_p$ für alle $a \in J_0$ eine Kontraktion auf B_p ist.

Beweis:

Sei $h_1, h_2 \in B_p$, $a_1 = a_2 = a \in J_0$ und $\phi_0(i) := \phi^P + [id_c + \prod_{W(a)}] h_i \phi^P$, $i=1,2$, $\phi \in C$. Dann gilt mit (3c) und $\phi_i = \phi_0(i)$, $\phi_0^P(i) = \phi^P$, $i=1,2$ die Ungleichung

$$|S(a, h_1)\phi - S(a, h_2)\phi| \leq (2k_3)^{-1} |\phi^P| |h_1 - h_2|.$$

Das zeigt wegen $|\phi^P| \leq k_3 |\phi|$: $|S(a, h_1) - S(a, h_2)| \leq \frac{1}{2} |h_1 - h_2|$.

Aus dem Fixpunktsatz von Banach und (4a)-(4c) folgt, daß $S(a, \cdot)$ einen Fixpunkt in B_p besitzt.

(5) Wir zeigen:

Der Fixpunkt $h = h(a) \in B_p$ von $S(a, \cdot)$ ist stetig in a .

Beweis:

Seien $a, b \in J_0$ und zwei Fixpunkte $h(a), h(b) \in B_p$ gegeben.

$$\begin{aligned} |h(a) - h(b)| &= |S(a, h(a)) - S(b, h(b))| \leq \\ &\leq |S(a, h(a)) - S(b, h(a))| + |S(b, h(a)) - S(b, h(b))| \leq \\ &\leq |S(a, h(a)) - S(b, h(a))| + \frac{1}{2} |h(a) - h(b)| \end{aligned}$$

$$|h(a) - h(b)| \leq 2 \cdot |S(a, h(a)) - S(b, h(a))|;$$

da $S(a, h)$ stetig an der Stelle $a \in J_0$ für fixes $h \in B_p$ ist, folgt die Stetigkeit des Fixpunktes $h(a)$ an der Stelle $a \in J_0$.

(6) Für jedes $a \in J_0$ liefert der Fixpunkt $h(a) = h$ eine invariante Lösungsmannigfaltigkeit.

Beweis:

Sei ein $a \in J_0$ und ein derartiger Fixpunkt $h = h(a)$ gegeben. Um die Behauptung von (6) zu zeigen, betrachten wir die Restriktion $h(a)|_{P(a)}: P(a) \rightarrow C$. Für $\phi^P \in P(a)$ folgt:

$$\begin{aligned} h(a)\phi^P &= S(a, h(a))\phi^P = \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \{ (id_c - \prod_{W(a)})\phi_0 - T^0(a, -t)y_t^Q(a, \phi_0, h(a)) \} \end{aligned}$$

mit $\phi_0 := \phi^P + (id_c - \prod_{W(a)})h(a)\phi^P$. Da $Q(a)$ abgeschlossen ist, folgt $h(a)\phi^P \in Q(a)$.

Dann ist aber $(\text{id}_c - \prod_{W(a)})\phi_0 = h(a)\phi^P$, und $\phi_0 = \phi^P + h(a)\phi^P$.

Deshalb wird $\lim_{t \rightarrow -\infty} T^0(a, -t)y_t^Q(a, \phi_0, h(a)) = 0$.

Für $y_T^Q \in Q(a)$ und $T > 0 \geq t$, $T, t \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$y_T^Q = T^0(a, T)T^0(a, -t)y_t^Q + \int_t^T T^0(a, T-s) X_0^Q(d\tilde{g}(s, a, \phi, h) + \tilde{f}(s, a, \phi, h)ds)$$

mit $\tilde{g}(t, a, \phi, h) := ag(y_t^P + h(a)y_t^P)$, $\tilde{f}(t, a, \phi, h) := af(y_t^P + h(a)y_t^P)$. Mit Berücksichtigung des vorher gezeigten und der Substitution $s \rightarrow s+T$ ergibt sich

$$y_T^Q = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{t-T}^0 T^0(a, -s) X_0^Q(d\tilde{g}(s+T, a, \phi, h) + \tilde{f}(s+T, a, \phi, h)ds).$$

Für $h(a)y_T^P = S(a, h(a))y_T^P$ folgt

$$h(a)y_T^P = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 T^0(a, -s) X_0^Q(dg_3(s) + f_3(s)ds)$$

mit $g_3(t) = ag(z_t^P + h(a)z_t^P)$, $f_3(t) = af(z_t^P + h(a)z_t^P)$, und z ist die Lösung von (3.25) zum Anfangswert $(0, y_T^P + (\text{id}_c - \prod_{W(a)})h(a)y_T^P) = (0, y_T^P + h(a)y_T^P) \in \mathbb{R} \times C$.

Die Funktionen $y(\cdot+T)$ und $z(\cdot)$ sind Lösungen von (3.25) zu möglicherweise verschiedenen Anfangswerten. Aber nach den Abschätzungen (3.26) in (2) gilt mit $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2 \in \mathbb{R}^+$

$$|y_{t+T}^P - z_t^P| \leq |y_T^P - z_0^P| \cdot \tilde{k}_1 \cdot e^{\tilde{k}_2 |t|} = 0 \text{ für } t \in \mathbb{R};$$

da $\tilde{g}, g_3, \tilde{f}, f_3$ nur von den Projektionen abhängen, erhalten wir damit $y_T^Q = h(a)y_T^P$ für alle $T \in \mathbb{R}^+$, und $h(a)$ liefert eine invariante Mannigfaltigkeit für (3.25).

(7) Die Fixpunkte $h(a)$ ergeben auch für die Gleichung (3.24) invariante Lösungsmannigfaltigkeiten. Denn es ist $h(a)\phi^P \in Q(a)$. (3.25) geht deshalb mit

$$(\text{id}_c - \prod_{W(a)})h(a)\prod_{W(a)}y_t + \prod_{W(a)}y_t = y_t$$

für alle Lösungen $y_t(a, \phi^P + h(a)\phi^P)$ von (3.25) in (3.24) über. Nun zeigen wir, daß jede Lösung $\tilde{y}$ von Gleichung (3.24) mit einem Anfangswert $(0, \phi^P + h(a)\phi^P) \in \mathbb{R} \times C$ für $t \geq 0$ die Gleichung $\tilde{y}_t = \tilde{y}_t^P + h(a)\tilde{y}_t^P$ erfüllt.

Dazu definieren wir die folgenden stetigen Funktionen:

$$\alpha: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0,1], x \mapsto \alpha(x),$$

$$\alpha(x) := \begin{cases} 0, & x > 1 \\ -2(x-1), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f_\alpha: C \rightarrow \mathbb{R}, \phi \mapsto f_\alpha(\phi) := f(\phi^{P+\alpha}(|\phi^Q/\epsilon|)\phi^Q),$$

$$g_\alpha: C \rightarrow \mathbb{R}, \phi \mapsto g_\alpha(\phi) := g(\phi^{P+\alpha}(|\phi^Q/\epsilon|)\phi^Q).$$

Wir zeigen:

Zu jedem Anfangswert $(0, \phi^{P+h(a)\phi^P}) \in \mathbb{R} \times C$ besitzt die Gleichung

$$\frac{d}{dt}[D^0(a, y_t) - \alpha g_\alpha(y_t)] = F^0(a, y_t) + \alpha f_\alpha(y_t)$$

genau eine Lösung.

Beweis:

αg_α und αf_α erfüllen die Voraussetzungen von Satz 3.1.5. Da $|\alpha(|\phi^Q/\epsilon|)\phi^Q| < \epsilon$ für alle $\phi \in C$ gilt, folgt mit den Abschätzungen aus c) für alle $\phi, \psi \in C$

$$|\alpha f_\alpha(\phi) - \alpha f_\alpha(\psi)| \leq |a|k_4q|\phi - \psi|,$$

$$|\alpha g_\alpha(\phi) - \alpha g_\alpha(\psi)| \leq |a|k_4q|\phi - \psi|.$$

Daraus ergeben sich leicht die Abschätzungen, die in Satz 3.1.5 verlangt werden.

Die Restriktion der Lösung y von Gleichung (3.25) mit Anfangswert $(0, \phi^{P+h(a)\phi^P}) \in \mathbb{R} \times C$ auf das Intervall $[-1, +\infty)$ erfüllt Gleichung (3.24).

Wegen $h(a) \in B_p$ und $p < \frac{1}{2}\epsilon$, ist $|y_t^Q| = |h(a)y_t^P| < p < \frac{1}{2}\epsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$.

Damit gilt $f_{\alpha}(y_t) = f(y_t)$, $g_{\alpha}(y_t) = g(y_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$, und die Restriktion von y erfüllt die Gleichung

$$\frac{d}{dt}[D^0(a, y_t) - ag_{\alpha}(y_t)] = F^0(a, y_t) + af_{\alpha}(y_t).$$

Für die Restriktion einer Lösung $\tilde{y}$ von (3.24) mit dem Anfangswert $(0, \phi^P + h(a)\phi^P) \in \mathbb{R} \times C$ auf das Intervall $[-1, +\infty)$ gilt $|\tilde{y}_0^Q| = |h(a)\phi^P| < p < \frac{1}{2}\epsilon$.

1. Fall: $|\tilde{y}_t^Q| < \frac{1}{2}\epsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$

Dann gilt $f_{\alpha}(\tilde{y}_t) = f(\tilde{y}_t)$, $g_{\alpha}(\tilde{y}_t) = g(\tilde{y}_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$, und die Restriktion von $\tilde{y}$ erfüllt die Gleichung

$$\frac{d}{dt}[D^0(a, y_t) - ag_{\alpha}(y_t)] = F^0(a, y_t) + af_{\alpha}(y_t).$$

2. Fall: Es gibt ein $\tau \in \mathbb{R}^+$, so daß $|\tilde{y}_\tau^Q| = \frac{1}{2}\epsilon$ ist und für alle $t \in [0, \tau)$ $|\tilde{y}_t^Q| < \frac{1}{2}\epsilon$ gilt.

Dann gilt $f_{\alpha}(\tilde{y}_t) = f(\tilde{y}_t)$ und $g_{\alpha}(\tilde{y}_t) = g(\tilde{y}_t)$ für alle $t \in [0, \tau)$, und die Restriktion von $\tilde{y}$ auf das Intervall $[-1, \tau)$ erfüllt wie die Restriktion von y auf das Intervall $[-1, \tau)$ die Gleichung

$$\frac{d}{dt}[D^0(a, y_t) - ag_{\alpha}(y_t)] = F^0(a, y_t) + af_{\alpha}(y_t).$$

Mit Bemerkung 3.1.6 ist dann $\tilde{y}_t = y_t$ für alle $t \in [0, \tau)$, und mit der Stetigkeit von y und $\tilde{y}$ folgt $|\tilde{y}_\tau^Q| = |y_\tau^Q| = |h(a)y_\tau^P| < \frac{1}{2}\epsilon$ ein Widerspruch.

Also gilt der 1. Fall. Die Restriktionen von y und $\tilde{y}$ auf das Intervall $[-1, +\infty)$ erfüllen beide die Gleichung

$$\frac{d}{dt}[D^0(a, y_t) - ag_{\alpha}(y_t)] = F^0(a, y_t) + af_{\alpha}(y_t).$$

Mit Bemerkung 3.1.6 gilt dann $\tilde{y}_t = y_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ und es folgt $\tilde{y}_t = \tilde{y}_t^P + h(a)\tilde{y}_t^P$.

Damit ist der Satz bewiesen.

◇

3.4 Ein Hopf - Verzweigungssatz für neutrale Funktional - Differentialgleichungen

Im letzten Abschnitt von Kapitel 3 beweisen wir einen Verzweigungssatz für periodische Lösungen der Gleichung

$$\frac{d}{dt}[y(t) - ay(t-1) - ag(y_t)] = a[by(t) + cy(t-1)] + af(y_t) .$$

Die invarianten Lösungsmannigfaltigkeiten aus Abschnitt 3.3 ermöglichen es uns, statt der Trajektorien y_t , $t \in \mathbb{R}$ in C die Trajektorien y_t^P , $t \in \mathbb{R}$ in P zu betrachten.

Das Existenzproblem periodischer Lösungen können wir damit auf eine Fixpunktgleichung für y_t^P in P zurückführen.

Da P endlichdimensional ist, kann die Fixpunktgleichung mit dem Brouwerschen Abbildungsgrad untersucht werden.

In [32] wird die Verzweigung periodischer Funktionen im Zusammenhang mit Halbflüssen in einer sehr allgemeinen Form diskutiert. Es ist möglich die Voraussetzungen dieses Verzweigungssatzes für den durch y_t^P in P erzeugten Halbfluß nachzuweisen. Dieser Nachweis ist jedoch in unserem Fall aufwendiger als der in 3.4 dargestellte direkte Beweis.

3.4.1 Lemma

Es sei eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion

$$H: [0,1] \times U \rightarrow \mathbb{R}^n, (c,x) \mapsto H(c,x)$$

gegeben.

Die Menge $S := \{(c,x) \in [0,1] \times U \mid H(c,x) = 0\}$ sei kompakt. Für jedes $c \in [0,1]$ sei die Menge $S_c := \{(c,x) \mid (c,x) \in S\}$ und die Funktion $H_c: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto H(c,x)$ definiert.

Der Brouwersche Abbildungsgrad von H_0 bezüglich des Wertes $x = 0$ und U sei von 0 verschieden: $\deg(H_0, U, 0) \neq 0$.

Dann gilt:

Es gibt eine zusammenhängende kompakte Menge $D \subset S$ mit $D \cap S_0 \neq \emptyset \neq D \cap S_1$. Zu jedem $c \in [0,1]$ gibt es ein $(c,x) \in D$.

Beweis:

Lemma 3.4.1 folgt direkt aus Lemma 3.4 in [30], S.51 .

◇

3.4.2 Satz

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 3.3.1 .

$h(a)$ ist die invariante Lösungsmannigfaltigkeit zu $a \in J_0$ von (3.24) nach Satz 3.3.1, und es sei

$$\phi_1(\theta) := e^{\omega_1(a) \cdot \theta} \left(\frac{d}{dz} \Delta(\omega_1(a)) \right)^{-1}, \quad \phi^P\left(\frac{c}{n}\right) := \frac{1}{n} c(\phi_1 + \bar{\phi}_1) \in P(a)$$

für $a \in J_0$, $c \in [0, 1]$, $\theta \in [-1, 0]$ und $n \in \mathbb{N}$.

Zusätzlich gelte:

Für die stetig differenzierbare Funktion $\omega_1 : J \rightarrow \mathbb{C}$, $a \mapsto \omega_1(a)$ gibt es ein $a_0 \in J_0 \setminus \text{Rd} J_0$ mit $\frac{d}{da} \text{Re}(\omega_1(a_0)) \neq 0$, $\text{Re}(\omega_1(a_0)) = 0$, und es ist $\omega_2 = \bar{\omega}_1$.
f und g seien stetig differenzierbar und $\frac{d}{d\phi} f(0) = \frac{d}{d\phi} g(0) = 0$.

Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und eine zusammenhängende kompakte Menge $D \subset [0, 1] \times J_0 \times \mathbb{R}$ mit $\tau_0 := 2\pi / \text{Im}(\omega_1(a_0))$, $(0, a_0, \tau_0) \in D \neq \{(0, a_0, \tau_0)\}$, so daß für jedes $(c, a, \tau) \in D$, $c \neq 0$ die Lösung zum Anfangswert $(0, \phi^P(c/m) + h(a)\phi^P(c/m)) \in \mathbb{R} \times C$ von (3.24) zum Parameter $a \in J_0$ eine nichttriviale periodische Lösung mit Periode τ ist.

$(a_0, \tau_0, 0) \in J_0 \times \mathbb{R} \times C$ ist ein Hopf-Verzweigungspunkt, d.h. es gibt ein Kontinuum periodischer Lösungen, die vom Punkt $(a_0, \tau_0, 0)$ abzweigen.

Beweis:

Wir führen zuerst eine Vorüberlegung aus, die uns den Beweisansatz liefert.

Sei $y = y(\cdot, a, \phi^P(\frac{c}{n}) + h(a)\phi^P(\frac{c}{n}), h(a))$ die Lösung der Gleichung (3.25) zum Parameter $a \in J_0$ für $c \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ mit dem Anfangswert $(0, y_0) = (0, \phi^P(\frac{c}{n}) + h(a)\phi^P(\frac{c}{n}))$. Nach Satz 3.2.7 erhalten wir für $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$

$$y_t^P = T^0(a, t) \phi^P\left(\frac{c}{n}\right) + \int_0^t T^0(a, t-s) X_0^P[a \cdot dg(y_s) + a \cdot f(y_s) ds]$$

mit $y_t = y_t(a, \phi^P(\frac{c}{n}) + h(a)\phi^P(\frac{c}{n}), h(a))$.

y ist als Lösung von (3.25) eindeutig durch den Anfangswert bestimmt. Deshalb ist äquivalent dazu, daß y_t^P periodisch mit

Periode $\tau > 0$ ist, die Gleichung

$$(3.29) \quad (T^0(a, \tau) - \text{id}_C) \phi^P\left(\frac{c}{n}\right) + a X_0^P \cdot g(y_\tau) - a X_\tau^P g(y_0) + \\ + \int_0^\tau [a T^0(a, \tau-s) \dot{X}_0^P \cdot g(y_s) + a T^0(a, \tau-s) X_0^P f(y_s)] ds = 0.$$

Als hinreichende Bedingung für Gleichung (3.29) ergibt sich unter Berücksichtigung der Definition von $T^0(a, t) \phi^P$, $T^0(a, t) X_0^P$ und der Eigenschaft $W(a) = \{\omega_1(a), \bar{\omega}_1(a)\}$ die Gleichung

$$[e^{\omega_1(a) \cdot \tau} - 1] \cdot \frac{c}{n} + a g(y_\tau) - a e^{\omega_1(a) \tau} \cdot g(y_0) + \\ + a \int_0^\tau e^{\omega_1(a)(\tau-s)} [f(y_s) + \omega_1(a) \cdot g(y_s)] ds = 0.$$

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ folgende Funktion:

$$H^n: (0, 1] \times J_0 \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}, \quad (c, a, t) \mapsto H^n(c, a, t) \\ H^n(c, a, t) := e^{\omega_1(a)t} - 1 + n \frac{1}{c} \cdot a \cdot \{g(y_t) - e^{\omega_1(a)t} g(y_0) + \\ + \int_0^t e^{\omega_1(a)(t-s)} [f(y_s) + \omega_1(a) g(y_s)] ds\}.$$

Dabei ist y die Lösung der Gleichung (3.25) zum Anfangswert $(0, \phi^P(\frac{c}{n}) + h(a) \phi^P(\frac{c}{n})) \in \mathbb{R} \times C$. Wegen Gleichung (3.29) liefern gerade die Nullstellen der Funktion H^n periodische Lösungen der Gleichung (3.25). Eine Lösung von (3.25) mit Anfangswert $(0, \phi^P(\frac{c}{n}) + h(a) \phi^P(\frac{c}{n}))$ erfüllt im Intervall $[-1, +\infty)$ auch Gleichung (3.24). Deshalb ist eine periodische Lösung von (3.25) mit Anfangswert $(0, \phi^P(\frac{c}{n}) + h(a) \phi^P(\frac{c}{n}))$ auch eine periodische Lösung von (3.24). Die Nullstellen von (3.29) liefern also auch periodische Lösungen von (3.24).

Wir wollen für den weiteren Beweis Lemma 3.4.1 benutzen.

Dazu zeigen wir:

(1) Jede Funktion H^n , $n \in \mathbb{N}$ besitzt eine stetige Fortsetzung H_0^n auf $[0, 1] \times J_0 \times \mathbb{R}_0^+ =: [0, 1] \times U_0$.

(2) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\tilde{H}^n: [0, 1] \times U_0 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (c, a, t) \mapsto (\text{Re}(H_0^n(c, a, t)), \text{Im}(H_0^n(c, a, t))),$$

die durch H_0^n induzierte stetige Funktion.

Dann gibt es eine beschränkte offene Umgebung $U \subset U_0$ mit $(a_0, \tau_0) \in U$, $(0, 0) \notin U \cap \text{Rd}U$, so daß gilt:

- (i) $\tilde{H}^1(0, a_0, \tau_0) = \tilde{H}^n(0, a_0, \tau_0) = 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $\tilde{H}^1(0, a, t) = \tilde{H}^n(0, a, t) \neq 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$
und alle $(a, t) \in (U \setminus \{(a_0, \tau_0)\}) \cap \text{Rd}U$.
- (3) Es gibt mindestens ein $m \in \mathbb{N}$, so daß für $\tilde{H}^m$ gilt:
 - (i) $\tilde{H}^m(c, a, t) \neq 0$, für alle $(c, a, t) \in [0, 1] \times \text{Rd}U$;
 - (ii) $S := \{(c, a, t) \in [0, 1] \times U \mid \tilde{H}^m(c, a, t) = 0\}$ ist kompakt.
- (4) $\deg(\tilde{H}^m(0, \cdot, \cdot), U, 0) \neq 0$.

Beweis:

(1) Die Stetigkeit von H^n in den Punkten $(c, a, t) \in [0, 1] \times U_0$ mit $c \neq 0$ ergibt sich daraus, daß für diese Punkte H^n eine Zusammensetzung stetiger Abbildungen ist. Insbesondere ist y stetig abhängig vom Anfangswert $\Phi^P(\frac{c}{n}) + h(a)\Phi^P(\frac{c}{n})$, und h ist nach Satz 3.3.1 stetig in a .

Wir betrachten also nur konvergente Folgen (c_j, a_j, t_j) in $(0, 1] \times U_0$ mit $\lim_{j \rightarrow +\infty} (c_j, a_j, t_j) = (0, a, t) \in [0, 1] \times U_0$ und zeigen:

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} [H^n(c_j, a_j, t_j) - (e^{\omega_1(a_j)t_j} - 1)] = 0.$$

Sei nun (c_j, a_j, t_j) , $j \in \mathbb{N}$ eine derartige Folge gegeben. Da die $t_j \in \mathbb{R}$ konvergieren, also insbesondere beschränkt sind, gibt es mit Satz 3.1.7 eine Konstante $k_1 \in \mathbb{R}^+$ derart, daß $|y_{t_j}(a_j, \Phi^P(\frac{c_j}{n_j}) + h(a_j)\Phi^P(\frac{c_j}{n_j}), h(a_j))| \leq k_1 \cdot |\Phi^P(\frac{c_j}{n_j})|$ ist.

Wegen der Definition von $\Phi^P(\frac{c_j}{n_j})$ gibt es eine Konstante $k_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $|\Phi^P(\frac{c_j}{n_j})| \leq \frac{c_j}{n_j} \cdot k_2$. Dabei sind k_1 und k_2 unabhängig von $a \in J_0$.

Da $\frac{d}{dt}f(0) = \frac{d}{dt}g(0) = 0$ und $f(0) = g(0) = 0$ ist, existiert eine monotone stetige Funktion $k: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $k(0) = 0$ unabhängig von $a \in J_0$, so daß für alle $\phi \in C$ gilt:

$$|af(\phi)| \leq k(|\phi|) \cdot |\phi| \text{ und } |ag(\phi)| \leq k(|\phi|) \cdot |\phi|.$$

Damit gibt es eine von $a \in J_0$ unabhängige Konstante $k_3 \in \mathbb{R}^+$ derart, daß

$$|H^n(c_j, a_j, t_j) - [e^{\omega_1(a_j)t_j} - 1]| \leq k_3 \cdot k(k_1 |\Phi^P(\frac{c_j}{n})|)$$

ist. Es ist $\lim_{j \rightarrow 0} c_j = 0$. Damit ist auch $\lim_{j \rightarrow 0} |\Phi^P(\frac{c_j}{n})| = 0$,

und die Behauptung ist gezeigt. Also besitzt jede Funktion H^n eine stetige Fortsetzung H_0^n auf $[0,1] \times U_0$.

(2i) Nach Definition ist $\tau_0 = 2\pi/\text{Im}(\omega_1(a_0))$. Damit ergibt sich mit dem im Beweis von (1) gezeigten

$$H_0^n(0, a_0, \tau_0) = e^{\omega_1(a_0) \cdot 2\pi/\text{Im}(\omega_1(a_0))} - 1;$$

mit $\text{Re}(\omega_1(a_0)) = 0$ wird $H_0^n(0, a_0, \tau_0) = 0$; damit folgt (2i).

(2ii) $\frac{\partial}{\partial(a,t)} H^n(0, a_0, \tau_0)$ sei die Funktionalmatrix von $H^n(0, \cdot, \cdot)$ an der Stelle (a_0, τ_0) . Einfache Differentiation liefert für die Determinante der Funktionalmatrix

$$\det(\frac{\partial}{\partial(a,t)} H^n(0, a_0, \tau_0)) = 2\pi \cdot \frac{d}{da} \text{Re}(\omega(a_0)) \neq 0.$$

Aus dem Beweis von (1) wissen wir, daß für $(a,t) \in U_0$ gilt:

$$H_0^1(0, a, t) = e^{\omega(a)t} - 1 = H_0^n(0, a, t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Also gibt es eine von $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Umgebung $U \subset U_0$, auf der $H^n(0, \cdot, \cdot)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ bijektiv ist.

Ohne Einschränkung von (2) können wir U so annehmen, daß auch $H^n(0, \cdot, \cdot)$ auf $(U \setminus \{(a_0, \tau_0)\}) \cup \text{Rd}U$ von 0 verschieden ist. Das ist (2ii).

Um (3i) zu zeigen, machen wir folgende

Annahme:

Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ gibt es ein $(c_i, a_i, t_i) \in [0,1] \times \text{Rd}U$ mit $H^i(c_i, a_i, t_i) = 0$.

Da $H^i(c_i, a_i, t_i) = H^1(\frac{1}{i}c_i, a_i, t_i)$ ist, folgt

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} H^1(\frac{1}{i}c_i, a_i, t_i) = 0.$$

Weil $(a_i, t_i) \in \text{Rd}U$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß die Folge (a_i, t_i) gegen ein $(a, t) \in \text{Rd}U$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{H}^1$ folgt nun

$$\tilde{H}^1(0, a, t) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \tilde{H}^1(\frac{1}{i} c_i, a_i, t_i) = 0, (a, t) \in \text{Rd}U.$$

Das ist ein Widerspruch, und die Behauptung von (3i) ist gezeigt.

(3ii) Da $S \subset [0, 1] \times U$ ist, ist S beschränkt.

Zu zeigen bleibt, daß S abgeschlossen ist. Dazu betrachten wir eine konvergente Folge $(c_n, a_n, t_n) \in S$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ mit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n, a_n, t_n) =: (c_1, a_1, t_1)$.

Wegen der Stetigkeit von $\tilde{H}^m$ folgt sofort: $\tilde{H}^m(c_1, a_1, t_1) = 0$.

Mit $S \subset [0, 1] \times U$ erhalten wir $(a_1, t_1) \in U \cup \text{Rd}U$.

$(a_1, t_1) \in \text{Rd}U$ steht im Widerspruch zu (3i). Also bleibt nur $(a_1, t_1) \in U$, und damit $(c_1, a_1, t_1) \in S$. S ist kompakt.

(4) Für den Brouwerschen Abbildungsgrad erhalten wir

$$\begin{aligned} \deg(\tilde{H}^m(0, \cdot, \cdot), U, 0) &= \sum_{x \in (\tilde{H}^m)^{-1}(0) \cap U} \text{sgn}(\det(\frac{\partial}{\partial(a, t)} \tilde{H}^m(0, x))) = \\ &= \text{sgn}(\det(\frac{\partial}{\partial(a, t)} \tilde{H}^m(0, a_0, \tau_0))) \neq 0. \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.4.1 gibt es nun eine zusammenhängende kompakte Menge $D \subset S$, so daß für alle $(c, a, t) \in D$ folgt: $\tilde{H}^m(c, a, t) = 0$.

Außerdem gibt es zu jedem $c \in [0, 1]$ ein $(c, a, t) \in D$ mit $\tilde{H}^m(c, a, t) = 0$.

Mit (2) ist $S_0 = \{(0, a_0, \tau_0)\}$.

Nach Lemma 3.4.1 ist $D \cap S_0 \neq \emptyset$. Also folgt $(0, a_0, \tau_0) \in D$.

Wegen der Beziehung von $\tilde{H}^m$ zu H_0^m gilt $H_0^m(c, a, t) = 0$ für alle $(c, a, t) \in D$. Wie oben festgestellt, liefern die Nullstellen von H_0^m periodische Lösungen von (3.24). Es folgt damit:

Ist $(c, a, \tau) \in D$, $c \neq 0$, dann ist die Lösung der Gleichung (3.24) mit dem Anfangswert $(0, \phi^P(c/m) + h(a)\phi^P(c/m))$ nichtkonstant und periodisch mit Periode $\tau > 0$.

D ist damit die im Satz behauptete Menge, und $(a_0, \tau_0, 0) \in J \times \mathbb{R} \times X$ ist ein Hopf-Verzweigungspunkt.

◇

4. Anwendung der Ergebnisse aus Kapitel 3 auf die Gleichung

$$\frac{d}{dt}y(t) - a f\left(\frac{d}{dt}y(t-1)\right) = b y(t)$$

Um die Sätze aus Kapitel 3 benutzen zu können, ist eine genaue Kenntnis der Nullstellen der charakteristischen Gleichung erforderlich.

Deshalb untersuchen wir in Abschnitt 4.1 die Nullstellen der Gleichung

$$(4.1) \quad z \cdot (1 - a \cdot e^{-z}) - c = 0 \text{ mit } c = -3^{-\frac{1}{2}}\pi \text{ und } a \in \mathbb{R}.$$

Weiter studieren wir den Zusammenhang zwischen den Nullstellen der Gleichung (4.1) und den Nullstellen der Gleichung (4.2) $z \cdot (1 - \frac{1}{a} \cdot e^{-z}) - \frac{1}{a}c = 0$.

In [04] betrachtet Brayton die Nullstellen der Gleichung

$$(4.3) \quad z \cdot (1 - \alpha \cdot e^{-zh}) + b + \alpha \cdot c = 0,$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 < 1$, $h, b, c \in \mathbb{R}^+$ und $b > c$.

Er zeigt:

(1) Es gibt unendlich viele isolierte Nullstellen $(\alpha, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ der Gleichung (4.3) mit $\operatorname{Re}(\omega) = 0$.

(2) Wenn $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ das erste positive α ist, so daß es eine Nullstelle (α_0, ω_0) mit $\operatorname{Re}(\omega_0) = 0$ von (4.3) gibt, dann gilt für jede weitere Nullstelle (α_0, ω) von (4.3) mit $\omega \notin \{\omega_0, \bar{\omega}_0\}$, daß der Realteil von ω negativ ist.

Wir werden für die Gleichung (4.2) mit $a=2$, $c = -3^{-\frac{1}{2}}\pi$ das gleiche Ergebnis erhalten wie Brayton für die von ihm untersuchte Gleichung mit $\alpha=\alpha_0$.

Da in der von uns untersuchten Gleichung $b=0$ und $-c>0$ ist, stellt unser Satz eine Ergänzung der Resultate von Brayton dar.

In Abschnitt 4.2 beweisen wir dann einen Hopf-Verzweigungssatz für die Gleichung

$$\frac{d}{dt}y(t) - a f\left(\frac{d}{dt}y(t-1)\right) = b y(t).$$

Die Aussagen aus Kapitel 3 sind nicht direkt auf diese Gleichung anwendbar.

Nach der Ausführung einiger Transformationen erhalten wir jedoch eine Gleichung, die sich in die Klasse der in Kapitel 3 betrachteten Gleichungen einordnen läßt. Für diese Gleichung beweisen wir dann den Verzweigungssatz.

Die Gleichung (E.1) läßt sich leicht den in diesem Kapitel betrachteten Gleichungen zuordnen. So erhalten wir einen weiteren Verzweigungssatz für periodische Lösungen für das Goodwinsche Modell.

4.1 Über die charakteristische Funktion

$$\Delta(a, z) = z - a \cdot z \cdot e^{-z} - c$$

Um die Ergebnisse aus Kapitel 3 benutzen zu können, ist eine genaue Kenntnis der Nullstellen der charakteristischen Funktion der linearen Gleichung erforderlich.

Wir zeigen folgendes Lemma.

4.1.1 Lemma

Sei $\Phi := \frac{1}{3}\pi$, $a_0 := [\cos(\Phi)]^{-1} = 2$ und $c := -\Phi \tan(\Phi) = -3^{-\frac{1}{2}}\pi$.

(1) Die Funktion $\Delta(a_0, \cdot): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z(1 - a_0 e^{-z}) - c$ besitzt genau zwei rein imaginäre Nullstellen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; es gilt $z_1 = i\Phi$, $z_2 = -i\Phi = \bar{z}_1$.

(2) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ sei die Funktion

$$\Delta(a, \cdot): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z(1 - a e^{-z}) - c$$

gegeben.

Dann gibt es ein offenes Intervall $J_0 \subset \mathbb{R}$ mit $a_0 \in J_0$ und stetig differenzierbare Funktionen

$$\omega_i: J_0 \rightarrow \mathbb{C}, a \mapsto \omega_i(a), i=1,2$$

mit $\omega_i(a_0) = z_i$ und $\Delta(a, \omega_i(a)) = 0$ für alle $a \in J_0$.

Die $\omega_i(a)$ sind Nullstellen erster Ordnung der Funktion $\Delta(a, \cdot)$. Es gilt $\frac{d}{da} \operatorname{Re}(\omega_i(a_0)) \neq 0$.

(3) Es gibt ein offenes Intervall $J_1 \subset J_0$ mit $a_0 \in J_1$ und eine Konstante $k \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $a \in J_1$ gilt:

Für $\omega \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a, z) = 0\} \setminus \{\omega_1(a), \omega_2(a)\}$ ist $\operatorname{Re}(\omega) > k$, und es ist $\omega_1 = \bar{\omega}_2$.

Beweis:

(1) Wir zeigen: $\Delta(a_0, z_1) = 0$.

Mit $z_1 = 1\phi$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\Delta(a_0, 1\phi) &= 1\phi - a_0 \cdot 1\phi \cdot e^{-1\phi} - c = \\ &= 1\phi - a_0 \cdot 1\phi \cdot \cos(\phi) - a_0 \cdot \phi \cdot \sin(\phi) - c = 0.\end{aligned}$$

Da a_0 und c reell sind, folgt sofort $\Delta(a_0, z_2) = \Delta(a_0, \bar{z}_1) = 0$.

Die Eindeutigkeit erhalten wir so:

Ist 1ψ , $\psi \in \mathbb{R}$ eine weitere Nullstelle von $\Delta(a_0, \cdot)$, dann ergibt sich wegen $c \neq 0$ zunächst $\psi \neq 0$. Damit folgt

$$\cos(\psi) = \frac{1}{a_0} \text{ und } c = -\psi \cdot \tan(\psi), \quad 2 \cdot \psi \notin \pi \mathbb{Z}.$$

Also ist $\psi = \pm\phi + 2\pi \cdot r$ mit $r \in \mathbb{Z}$. Wegen

$$-\phi \cdot \tan(\phi) = c = -\psi \cdot \tan(\psi), \quad 2 \cdot \psi \notin \pi \mathbb{Z} \text{ folgt } \psi = \pm \phi,$$

und die Eindeutigkeit ist gezeigt.

(2) Wir berechnen $\frac{d}{dz}\Delta(a_0, z_1)$.

$$\frac{d}{dz}\Delta(a_0, z_1) = (1 - a_0 e^{-z_1}) + z_1 a_0 e^{-z_1}$$

Wegen $\Delta(a_0, z_1) = 0$ und $z_1 \neq 0$ folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\Delta(a_0, z_1) &= \frac{1}{z_1} c + z_1 - c = \\ &= -\phi \tan(\phi) / (1\phi) + 1\phi + \phi \tan(\phi) = \\ &= 1(\tan(\phi) + \phi) + \phi \tan(\phi) \neq 0;\end{aligned}$$

für z_2 erhalten wir $\frac{d}{dz}\Delta(a_0, z_2) = \frac{d}{dz}\Delta(a_0, \bar{z}_1) \neq 0$.

Mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und dem Satz über implizite Funktionen folgt, daß es offene Intervalle I_i , $i=1,2$ mit $a_0 \in I_i$ und stetig differenzierbare Funktionen

$$\omega_i: I_i \rightarrow \mathbb{C}, \quad a \mapsto \omega_i(a), \quad i=1,2$$

gibt, mit $\Delta(a, \omega_i(a)) = 0$ für $a \in I_i$ und $\omega_i(a_0) = z_i$.

Wegen der Stetigkeit der Funktion

$$\frac{d}{dz}\Delta(\cdot, \cdot): \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (a, z_0) \mapsto \frac{d}{dz}\Delta(a, z_0)$$

gibt es offene Umgebungen $W_i \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ mit $(a_0, z_i) \in W_i$, so daß für alle $(a, z_0) \in W_i$, $i=1,2$ gilt: $\frac{d}{dz}\Delta(a, z_0) \neq 0$.

Wählen wir ein $J_0 \subset I_1 \cap I_2$ mit $a_0 \in J_0$, derart daß $(a, \omega_i(a)) \in W_i$ gilt für alle $a \in J_0$, dann liefern die Restriktionen

$$\omega_i: J_0 \rightarrow \mathbb{C}, a \mapsto \omega_i(a), \quad i=1,2$$

die behaupteten Funktionen.

Wegen $\frac{d}{dz}\Delta(a, \omega_i(a)) \neq 0$, sind die $\omega_i(a)$, $i=1,2$ Nullstellen erster Ordnung von $\Delta(a, \cdot)$.

Es gilt weiter

$$\frac{d}{da}\omega_i(a_0) = -\frac{d}{da}\Delta(a_0, \omega_i(a_0)) \cdot \left(\frac{d}{dz}\Delta(a_0, \omega_i(a_0))\right)^{-1}.$$

$$\text{Wir erhalten } \frac{d}{da}\Delta(a_0, \omega_i(a_0)) = -\omega_i(a_0) \cdot e^{-\omega_i(a_0)}.$$

Wegen $\Delta(a_0, \omega_i(a_0))=0$ folgt

$$\frac{d}{da}\Delta(a_0, \omega_i(a_0)) = -\omega_i(a_0) \cdot e^{-\omega_i(a_0)} = \frac{1}{a_0} \cdot (c - \omega_i(a_0));$$

$$\frac{d}{dz}\Delta(a_0, \omega_i(a_0)) = 1 - a_0 \cdot e^{-\omega_i(a_0)} + a_0 \cdot \omega_i(a_0) \cdot e^{-\omega_i(a_0)};$$

$$\frac{d}{dz}\Delta(a_0, \omega_i(a_0)) = c/\omega_i(a_0) + \omega_i(a_0) - c;$$

$$\frac{d}{da}\omega_i(a_0) = -(c - \omega_i(a_0)) \cdot [a_0 \cdot (c/\omega_i(a_0) + \omega_i(a_0) - c)]^{-1};$$

$$\frac{d}{da}\text{Re}(\omega_i(a_0)) = K \cdot (c^2 + \phi^2 - c); \quad K := a_0^{-1} \cdot |c/\omega_i(a_0) + \omega_i(a_0) - c|^{-2};$$

da $c < 0$ ist, ist $\frac{d}{da}\text{Re}(\omega_i(a_0)) \neq 0$.

(3a) Wir setzen für jedes $a \in J_0$ $W(a) := \{\omega_1(a), \omega_2(a)\}$.

Behauptung: Es gibt eine Konstante $k \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a_0, z) = 0\} \setminus W(a_0)$ gilt: $\text{Re}(z) \geq k$.

Beweis:

Wir führen den Beweis in zwei Schritten aus. Zuerst zeigen wir durch einen Widerspruchsbeweis, daß der Realteil aller Nullstellen $z_0 \in \mathbb{C}$ von $\Delta(a_0, \cdot)$ mit $z_0 \notin W(a_0)$ nicht negativ ist. Dann beweisen wir, daß sich die Nullstellen nicht an der imaginären Achse in $\mathbb{C}$ häufen.

(i) Annahme:

Es gibt ein $z_0 = x + iy \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a_0, z) = 0\} \setminus W(a_0)$ mit $\operatorname{Re}(z_0) = x \leq 0$.

Für $x = 0$ folgt nach (1) $z \in W(a_0)$. Das ist ein Widerspruch! Also ist $x < 0$.

Da mit z_0 auch $\bar{z}_0$ aus $\{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a_0, z) = 0\} \setminus W(a_0)$ ist, können wir ohne Einschränkung $y \geq 0$ annehmen.

Wir zeigen nun, daß $\Delta(a_0, \cdot)$ keine reellen Nullstellen besitzt, d.h. für y gilt sogar $y > 0$.

Dazu betrachten wir die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \Delta(a_0, x).$$

Für $x \in \mathbb{R}$ folgt

$$\frac{d}{dx} f(x) = 1 - 2 \cdot e^{-x} \cdot (1-x);$$

$$\frac{d}{dx} f(x) \leq -1 \text{ für } x \leq 0 \text{ und } \frac{d}{dx} f(x) > 0 \text{ für } x \geq \frac{1}{2}.$$

Also gibt es ein $x_m \in (0, \frac{1}{2})$, an dem f ein absolutes Minimum annimmt. Da $\frac{d}{dx} f(x_m) = 0$ ist, gilt $1 - x_m = \frac{1}{2} \cdot e^{x_m}$. Damit wird

$$f(x_m) = -x_m^2 \cdot (1-x_m)^{-1} - c.$$

Weil $x_m \in (0, \frac{1}{2})$ ist, folgt $f(x_m) > -\frac{1}{2} - c > 0$. Es gilt also $y > 0$.

Nun erhalten wir

$$x + i \cdot y - a_0 \cdot (x + i \cdot y) \cdot e^{-x-i \cdot y} - c = 0; \text{ dazu äquivalent}$$

$$(x-c) \cdot \frac{1}{a_0} \cdot e^x = x \cdot \cos(y) + y \cdot \sin(y)$$

$$\frac{1}{a_0} \cdot e^x = \cos(y) - x \cdot \sin(y) \frac{1}{y};$$

$$\text{daraus folgt } -\frac{1}{a_0} \cdot c \cdot e^x = (x^2 + y^2) \cdot \sin(y) \frac{1}{y}.$$

Es ist $0 < \phi = \frac{1}{3} \cdot \pi < \frac{1}{2} \cdot \pi$, $a_0 = \cos(\phi)^{-1} = 2$, $c = -\phi \tan(\phi) < 0$,

und damit ist $0 < -\frac{1}{a_0} c \cdot e^x \cdot (x^2 + y^2)^{-1} = \sin(y) \cdot \frac{1}{y}$.

Wegen $\sin(y) \cdot \frac{1}{y} > 0$, $a_0 > 0$ und $x < 0$, folgt aus

$$\frac{1}{a_0} e^x + x \cdot \sin(y) \cdot \frac{1}{y} = \cos(y) \text{ die Ungleichung}$$

$$\cos(y) < \frac{1}{a_0} = \cos(\phi).$$

Andererseits ist $z_0 \cdot (1 - a_0 \cdot e^{-z_0}) = c$. Mit $z_0 = x + iy$, $x < 0$, $a_0 = 2$ folgt

$$0 < y \leq |z_0| < |c| = |-\phi \cdot \tan(\phi)| = 3^{-\frac{1}{2}} \pi < (2/3)\pi = \pi - \phi.$$

Im Intervall $[0, \frac{1}{3}2\pi]$ ist $\cos$ streng monoton fallend. Insgesamt ergibt sich $0 < \phi < y < \pi - \phi$. Damit erhalten wir $y \cdot \sin(y) > \phi \cdot \sin(\phi)$. Mit $x < 0$ und

$$(x^2 + y^2) \cdot \sin(y) \cdot \frac{1}{y} \geq y \cdot \sin(y) > \phi \cdot \sin(\phi) = -c \frac{1}{a_0} > -c \frac{1}{a_0} \cdot e^x$$

folgt ein Widerspruch.

Der Realteil aller Nullstellen z_0 von $\Delta(a_0, \cdot)$ mit $z_0 \notin W(a_0)$ ist also nicht negativ.

(ii) Nun zeigen wir, daß sich die Nullstellen von $\Delta(a_0, \cdot)$ nicht an der imaginären Achse in $\mathbb{C}$ häufen.

Beweis:

Wir wählen ein $q \in \mathbb{R}^+$ mit $q < 1$, $qa_0 > 1$.

Annahme: Es gibt unendlich viele $z_k \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a_0, z) = 0\}$ mit $|\operatorname{Re}(z_k)| \leq k_2 := \ln(qa_0)$. Dann wird mit der Dreiecksungleichung

$$|z_k| \leq |c| \cdot |1 - a_0| \cdot e^{-\operatorname{Re}(z_k)} - 1, \text{ und wegen}$$

$$e^{\operatorname{Re}(z_k)} \leq qa_0 \text{ wird } |z_k| \leq |c|q(1-q)^{-1}.$$

Die z_k sind also beschränkt und besitzen deshalb einen Häufungspunkt von Nullstellen der analytischen Funktion $\Delta(a_0, \cdot)$. Diese ist dann nach dem Identitätssatz identisch 0. Das ist ein Widerspruch, und die Nullstellen von $\Delta(a_0, \cdot)$ häufen sich nicht an der imaginären Achse.

Damit gibt es eine Konstante $k \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a_0, z) = 0\} \setminus W(a_0)$ gilt: $\operatorname{Re}(z) > k$.

Ohne Einschränkung von (3a) können wir $k < \ln(2) = \ln(a_0)$ wählen.

Nun zeigen wir die Behauptung von (3) durch Widerspruch.

(3b) Annahme: In jedem Intervall $I_n := (a_0 - \frac{1}{n}, a_0 + \frac{1}{n}) \cap J_0$, $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $a_n \in I_n$ und ein $z_n \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Delta(a_n, z) = 0\} \setminus W(a_n)$ mit $\operatorname{Re}(z_n) \leq k$.

Aus $\Delta(a_n, z_n) = 0$, $z_n \neq 0$ folgt $z_n = c / (1 - a_n e^{-z_n})$. Nun ist $\operatorname{Re}(z_n) \leq k < \ln(2)$; damit wird

$$|a_n e^{-z_n}| = |a_n| |e^{-\operatorname{Re}(z_n)}| \geq |a_n| e^{-k}.$$

Da $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_0 = 2$ und $k < \ln(2)$ ist, können wir annehmen,

daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $|a_n| e^{-k} > 1 + \tau$ gilt, mit einem geeigneten $\tau \in \mathbb{R}^+$.

Daraus folgt $|z_n| \leq |c|/\tau$. Also sind die z_n beschränkt. Es gibt eine konvergente Teilfolge der z_n mit Grenzwert z_0 , die wir wieder mit z_n , $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen.

Es gilt: $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta(a_n, z_n) = \Delta(a_0, z_0)$.

z_0 ist also Nullstelle der Funktion $\Delta(a_0, \cdot)$.

Aber es ist $k \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z_0)$.

Das bedeutet, daß $z_0 \in \{\omega_1(a_0), \omega_2(a_0)\}$ ist. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, daß in einer Umgebung V_i von $(a_0, \omega_i(a_0))$, $i=1,2$ alle Punkte $(a, z) \in V_i$ mit $\Delta(a, z) = 0$ durch $(a, \omega_i(a))$ gegeben sind. Damit gibt es eine $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ $z_n \in W(a_n)$ gilt.

Das ist ein Widerspruch zu $z_n \notin \{\omega_1(a_n), \omega_2(a_n)\}$, und der erste Teil der Behauptung von (3) ist bewiesen. $\omega_1 = \bar{\omega}_2$ folgt nun auch leicht.

◇

4.1.2 Folgerung

Sei J_1 wie in Lemma 4.1.1 (3) und $\tilde{J} := \{\frac{1}{a} \mid a \in J_1, a \neq 0\}$.
Zu jedem $\frac{1}{a} \in \tilde{J}$ sei die Funktion

$$\tilde{\Delta}(\frac{1}{a}, \cdot): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \tilde{\Delta}(\frac{1}{a}, z) := z(1 - \frac{1}{a}e^{-z}) - \frac{1}{a}ce^{-z}$$

gegeben.

Dann gibt es ein offenes Intervall $J \subset \tilde{J}$ mit $\frac{1}{a_0} \in J$, $0 \notin \text{Rd}J$,
 $J \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\sup\{|\frac{1}{a}| \mid \frac{1}{a} \in J\} < 1$, so daß gilt:

(1) Die Funktionen

$$\tilde{\omega}_i: J \rightarrow \mathbb{C}, \frac{1}{a} \mapsto \tilde{\omega}_i(\frac{1}{a}) := -\omega_i(a), i \in \{1, 2\}$$

sind stetig differenzierbar.

Die $\tilde{\omega}_i(\frac{1}{a})$ sind von $\tilde{\Delta}(\frac{1}{a}, \cdot)$ Nullstellen erster Ordnung;

$$\frac{d}{d(1/a)} \text{Re}(\tilde{\omega}_i(\frac{1}{a_0})) \neq 0 \text{ und } \text{Re}(\tilde{\omega}_i(\frac{1}{a_0})) = 0, i=1, 2.$$

(2) Es gibt ein $\tilde{k} \in \mathbb{R}$ mit $0 < 2\tilde{k} < \sup\{\ln(|\frac{1}{a}|) \mid \frac{1}{a} \in J\}$, so daß die
Menge der Nullstellen von $\tilde{\Delta}(\frac{1}{a}, \cdot)$ für jedes $\frac{1}{a} \in J$ in zwei
disjunkte Teilmengen zerlegbar ist.

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \tilde{\Delta}(\frac{1}{a}, z) = 0\} =$$

$$= \{z \in \mathbb{C} \mid \tilde{\Delta}(\frac{1}{a}, z) = 0, \text{Re}(z) < 2\tilde{k}\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \tilde{\Delta}(\frac{1}{a}, z) = 0, |\text{Re}(z)| < -\tilde{k}\}$$

Weiter gilt

$$W(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid \tilde{\Delta}(\frac{1}{a}, z) = 0, |\text{Re}(z)| < -\tilde{k}\} = \{\tilde{\omega}_1(\frac{1}{a}), \tilde{\omega}_2(\frac{1}{a})\}.$$

Beweis:

(1a) Für $\frac{1}{a} \in \tilde{J}$ gilt:

$$\begin{aligned} ae^{-z} \cdot \tilde{\Delta}(\frac{1}{a}, -z) &= ae^{-z}[-z(1 - \frac{1}{a}e^z) - \frac{1}{a}ce^z] = \\ &= z(1 - ae^{-z}) - c = \Delta(a, z). \end{aligned}$$

(1b) Für $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $\tilde{\Delta}(\frac{1}{a}, z_0) = 0$ folgt $\Delta(a, -z_0) = 0$, und damit

$$\frac{d}{dz} \tilde{\Delta}(\frac{1}{a}, z_0) = -\frac{1}{a}e^{-z_0} \cdot \frac{d}{dz} \Delta(a, -z_0).$$

(1c) Mit Induktion erhält man, daß die Ordnung der Nullstelle z_0 von $\tilde{\Delta}(\frac{1}{a}, \cdot)$ gleich der Ordnung der Nullstelle $-z_0$ von $\Delta(a, \cdot)$ ist. Mit (1a) - (1b) und Lemma 4.1.1 (1) und (2) folgt die Behauptung (1) der Folgerung 4.1.2 .

(2) Ohne Einschränkung von (1) und Lemma 4.1.1 können wir k aus Lemma 4.1.1 (3) und J mit $\frac{1}{a_0} \in J$ so klein annehmen, daß $-k > \sup\{\ln|\frac{1}{a}| \mid \frac{1}{a} \in J\}$ und $\sup\{|\operatorname{Re}(\tilde{\omega}_i(\frac{1}{a}))| \mid \frac{1}{a} \in J, i=1,2\} < \frac{1}{2}k$ gilt. Mit (1), $\tilde{k} := -k/2$ und Lemma 4.1.1 (3) folgt die Behauptung (2) der Folgerung.

◇

4.2 Ein Hopf-Verzweigungssatz für periodische Lösungen der Gleichung

$$\frac{d}{dt}y(t) - a\left(\frac{d}{dt}y(t-1)\right) = by(t)$$

Wir beginnen zunächst mit einem vorbereitenden Lemma.

4.2.1 Lemma

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \text{ mit } f(0) = \frac{d}{dx}f(0) = 0 ;$$

sei $g: C \rightarrow \mathbb{R}, \phi \mapsto f(\phi(-1))$.

Dann gibt es zu jedem $q \in \mathbb{R}^+$ ein $\rho \in \mathbb{R}^+$ und eine Funktion

$g_\rho: C \rightarrow \mathbb{R}, \phi \mapsto g_\rho(\phi)$ mit den Eigenschaften:

$$a) |g_\rho(\phi) - g_\rho(\psi)| \leq q \cdot (|\phi - \psi|), |g_\rho(\phi)| \leq q \cdot \rho,$$

für alle $\phi, \psi \in C$;

$$b) g_\rho(\phi) = g(\phi) \text{ für } \phi \in C \text{ mit } |\phi| \leq \rho.$$

Beweis:

Sei $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow [0,1], x \mapsto \alpha(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\alpha(x) = 0$ für $|x| \geq 2$, $\alpha(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und $|\frac{d}{dx}\alpha(x)| \leq k_0$, $k_0 \in \mathbb{R}^+$, $k_0 \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir setzen: $g_\rho(\phi) := \alpha(\frac{1}{\rho}\phi(-1)) \cdot f(\phi(-1))$, für $\rho \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in C$.

Wegen der Definition von α und $|\phi(-1)| \leq |\phi|$ folgt sofort die Behauptung b).

Da $\frac{d}{dx}f(0) = f(0) = 0$ gilt, gibt es eine monotone stetige Funktion $k: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $k(0) = 0$, so daß $|f(x)| \leq k(|x|) \cdot |x|$ und $|\frac{d}{dx}f(x)| \leq k(|x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweis von a):

$$\begin{aligned} |g_\rho(\phi) - g_\rho(\psi)| &\leq |\alpha(\phi(-1)/\rho) - \alpha(\psi(-1)/\rho)| |f(\phi(-1))| + \\ &\quad + |\alpha(\psi(-1)/\rho)| |f(\phi(-1)) - f(\psi(-1))|. \end{aligned}$$

1. Fall $\max\{|\phi(-1)|, |\psi(-1)|\} < 2\rho$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} |g_\rho(\phi) - g_\rho(\psi)| &\leq \\ &\leq (k_0/\rho) |\phi(-1) - \psi(-1)| k(2\rho) 2\rho + |\phi(-1) - \psi(-1)| k(2\rho) \leq \\ &\leq (2k_0+1) k(2\rho) |\phi - \psi|. \end{aligned}$$

2. Fall $|\phi(-1)| < 2\rho$, $|\psi(-1)| \geq 2\rho$.

$$\begin{aligned} |g_\rho(\phi) - g_\rho(\psi)| &\leq |\alpha(\phi(-1)/\rho) - \alpha(\psi(-1)/\rho)| |f(\phi(-1))| \leq \\ &\leq (k_0/\rho) |\phi(-1) - \psi(-1)| 2\rho k(2\rho) \leq (2k_0+1) k(2\rho) |\phi - \psi|. \end{aligned}$$

3. Fall $|\psi(-1)| < 2\rho$, $|\phi(-1)| \geq 2\rho$. In diesem Fall erhält man eine Abschätzung analog dem 2. Fall.

4. Fall $\min\{|\phi(-1)|, |\psi(-1)|\} \geq 2\rho$.

Hier folgt $|g_\rho(\phi(-1)) - g_\rho(\psi(-1))| = 0$, und es bleibt nichts zu zeigen. Wegen $g_\rho(0) = 0$, folgt

$$|g_\rho(\phi)| = |g_\rho(\phi) - g_\rho(0)| \leq (2k_0+1) 2\rho k(2\rho).$$

Wählen wir ρ so klein, daß $q \geq 2(2k_0+1)k(2\rho)$ ist, dann folgt die Behauptung.

◇

4.2.2 Satz

Gegeben sei eine j -mal, $j \in \mathbb{N}$ stetig differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \text{ mit } f(0) = 0 \text{ und } \frac{d}{dx} f(0) = 1;$$

es sei $\phi = \frac{1}{3}\pi$, $a_0 = [\cos(\phi)]^{-1} = 2$, $b_0 = -\phi \tan(\phi) = -3^{-\frac{1}{2}}\pi$.

Bezeichne $C(\mathbb{R})$ den Banach-Raum der beschränkten stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm.

Dann gibt es in $\mathbb{R} \times C(\mathbb{R})$ ein Kontinuum K , dessen Abschluß $(a_0, 0)$ enthält, so daß für jedes $(a, y_p) \in K$ y_p eine stetig differenzierbare nichtkonstante periodische Funktion ist, die die Gleichung

$$(4.4) \quad \frac{d}{dt} y(t) = a \cdot f\left(\frac{d}{dt} y(t-1)\right) = b_0 \cdot y(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Beweis:

Wir zerlegen den Beweis in zwei Teile. Im ersten Teil transformieren wir die Gleichung (4.4) in eine geeignete Ersatzgleichung. Im zweiten Teil des Beweises wenden wir die Ergebnisse aus Kapitel 3 auf diese Ersatzgleichung an.

(li) Wegen Satz 1.4.1 ist es ausreichend, die Existenz eines Kontinuums $K \subset \mathbb{R} \times C(\mathbb{R})$ mit $(a_0, 0) \in \text{cl}(K) \neq \{(a_0, 0)\}$ nachzuweisen, so daß für $(a, y_p) \in K$ mit $a \neq a_0$ y_p eine stetige und nichtkonstante periodische Funktion ist, die die Gleichung

$$(4.5) \quad \frac{d}{dt}[y(t) - a \cdot f(y(t-1))] = b_0 \cdot y(t)$$

erfüllt.

(lii) f ist in einem hinreichend kleinen offenen Intervall U_0 um die 0 invertierbar. Wir ersetzen deshalb f durch eine j -mal stetig differenzierbare Funktion $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf ganz $\mathbb{R}$ invertierbar ist und in U_0 mit f übereinstimmt. Enthält das Kontinuum K den Punkt $(a_0, 0)$, dann genügt es zu zeigen, daß y_p periodische Lösung der Gleichung

$$(4.6) \quad \frac{d}{dt}[y(t) - a \cdot \tilde{f}(y(t-1))] = b_0 \cdot y(t)$$

ist. Wir wollen noch eine weitere Transformation vornehmen.

(liii) Ist $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Gleichung

$$(4.7) \quad \frac{d}{dt}[y(t) - \frac{1}{a} \tilde{f}^{-1}(y(t-1))] = \frac{1}{a} b_0 \tilde{f}^{-1}(y(t-1))$$

$a \neq 0$, dann gilt für die Funktion

$$z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto z(t) := \tilde{f}^{-1}(y(-t-1))$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[z(t) - a \tilde{f}(z(t-1))] &= a \frac{d}{dt}[\frac{1}{a} \tilde{f}^{-1}(y(-t-1)) - y(-t)] = \\ &= a \cdot \frac{1}{a} b_0 \tilde{f}^{-1}(y(-t-1)) = b_0 z(t). \end{aligned}$$

Also ist z eine Lösung von (4.6).

Statt die Existenz eines Kontinuums periodischer Lösungen von (4.6) zu zeigen, reicht es auch die Existenz eines derartigen Kontinuums für (4.7) nachzuweisen.

Nun gilt weiter $\tilde{f}^{-1}(0) = 0$ und $\frac{d}{dx}\tilde{f}^{-1}(0) = 1$. Es gibt damit eine stetig differenzierbare Funktion $\tilde{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \tilde{g}(x)$ mit $\tilde{g}(0) = \frac{d}{dx}\tilde{f}^{-1}(0) = 0$ und $\tilde{f}^{-1}(x) = x + \tilde{g}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit können wir die folgende Gleichung betrachten:

$$(4.8) \quad \frac{d}{dt}[y(t) - \frac{1}{a}y(t-1) - \frac{1}{a}\tilde{g}(y(t-1))] = \frac{1}{a}[b_0y(t-1) + b_0\tilde{g}(y(t-1))].$$

(2) Nun wählen wir ein beschränktes offenes Intervall J_1 in $\mathbb{R}$ mit $J_1 \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 \notin \text{Rd} J_1$, $a_0 \in J_1$ und setzen $c := b_0$.

Wir definieren für jedes $a \in J_1$ folgende Abbildungen:

$$D^0(\frac{1}{a}, \cdot): C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto \phi(0) - \frac{1}{a}\phi(-1),$$

$$F^0(\frac{1}{a}, \cdot): C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto \frac{1}{a}c\phi(-1)$$

und betrachten die Funktion

$$\tilde{\Delta}(\frac{1}{a}, \cdot): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, \quad z \mapsto \tilde{\Delta}(\frac{1}{a}, z) := z(1 - \frac{1}{a}e^{-z}) - \frac{1}{a}ce^{-z}.$$

Mit Folgerung 4.1.2 können wir ein offenes Intervall $J \subset \{\frac{1}{a} \mid a \in J_1\}$ mit $\frac{1}{a_0} \in J$ wählen, so daß die Voraussetzungen von 3.3.1 a) für die Nullstellen der charakteristischen Gleichung $\tilde{\Delta}(\frac{1}{a}, z) = 0$, $\frac{1}{a} \in J$ erfüllt sind. Damit gibt es auch die in Satz 3.1.1 b) benutzten Projektionen $\Pi_{W(\frac{1}{a})}$ für alle $\frac{1}{a} \in J$.

Mit Satz 3.2.10 gibt es ein abgeschlossenes Intervall $J_0 \subset J$, so daß die in Satz 3.3.1 b) geforderten Abschätzungen mit $k = \tilde{k}$, $\tilde{k}$ aus Folgerung 4.1.2, gelten.

Für $\rho \in \mathbb{R}^+$ definieren wir die Abbildungen

$$g_\rho: C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto g_\rho(\phi) := \tilde{g}_\rho(\phi)$$

$$f_\rho: C \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto f_\rho(\phi) := b_0\tilde{g}_\rho(\phi).$$

Dabei ist $\tilde{g}_\rho$ aus $\tilde{g}$ wie in Lemma 4.2.1 gebildet.

Da für $\phi \in C$ mit $|\phi| < \rho$ $g_\rho(\phi) = \tilde{g}(\phi(-1))$ gilt, reicht es, wenn wir die Behauptung des Satzes für die Gleichung

$$(4.9) \quad \frac{d}{dt}[D^0(\frac{1}{a}, y_t) - \frac{1}{a}g_\rho(y_t)] = F^0(\frac{1}{a}, y_t) + \frac{1}{a}f_\rho(y_t)$$

beweisen.

Wir zeigen: Mit dem Intervall $J = \{\frac{1}{a} \mid a \in J_1\}$ sind die Voraussetzungen von Satz 3.3.1 für Gleichung (4.9) erfüllt.

Beweis:

Wir haben bereits gezeigt, daß die Voraussetzungen a) und b) von Satz 3.3.1 gelten.

Mit Folgerung 4.1.2 können wir o.E. des bereits gezeigten für J annehmen:

$$\sup\{|\operatorname{Re}(\omega_1(\frac{1}{a}))|, |\operatorname{Re}(\omega_2(\frac{1}{a}))| \mid \frac{1}{a} \in J\} =: r_0 < -k.$$

Dann können wir ein $q \in \mathbb{R}^+$ wählen, so daß die Abschätzungen aus d) (i) und (ii) aus Satz 3.3.1 erfüllt sind und zusätzlich gilt:

$$k_2 q [1 - 2\frac{1}{k} + (1 - e^{-k})^{-1}] < (1 + k_3)^{-1}.$$

Zu diesem q können wir mit Lemma 4.2.1 und $|\phi - \psi| \leq |\phi^P - \psi^P| + |\phi^Q - \psi^Q|$ ein $\rho_0 \in \mathbb{R}^+$ finden, derart daß die Abschätzungen aus Satz 3.3.1 c) für f_{ρ_0} und g_{ρ_0} mit $\epsilon = \rho_0$ gelten. Schließlich gibt es ein $p \in \mathbb{R}^+$, so daß gilt:

$$k_2 q [1 - 2\frac{1}{k} + (1 - e^{-k})^{-1}] < p / \rho_0 < (1 + k_3)^{-1}.$$

Das ist die noch fehlende Abschätzung d) (iii).

Also gibt es mit Satz 3.3.1 invariante Lösungsmannigfaltigkeiten für die Gleichung (4.9).

Nun zeigen wir, daß auch die Voraussetzungen von Satz 3.4.2 erfüllt sind.

g_{ρ_0} und f_{ρ_0} sind stetig differenzierbar. Für $\frac{1}{a_0} \in J$ gilt mit der Folgerung 4.1.2:

$$\operatorname{Re}(\omega_1(\frac{1}{a_0})) = \operatorname{Re}(\omega_2(\frac{1}{a_0})) = 0 \text{ und } \frac{d}{d(1/a)} \operatorname{Re}(\omega_1(\frac{1}{a_0})) \neq 0.$$

Außerdem ist $\omega_1 = \bar{\omega}_2$, und ω_1, ω_2 sind stetig nach a in J differenzierbar.

Damit gilt der Verzweigungssatz für (4.9), und daraus folgt mit dem unter (1) gezeigten leicht der Verzweigungssatz für (4.4).

◇

Dieses Anwendungsbeispiel soll die Untersuchungen in dieser Arbeit abschließen. Wie in der Einleitung bereits dargelegt, ergeben sich verschiedene weitere Fragestellungen, die im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt wurden. Die vorliegenden Ergebnisse geben jedoch Anlaß zur Hoffnung, daß auch diese Fragen positiv beantwortet werden können.

Abkürzungen und Symbole

$\mathbb{N}$: Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0$: $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z}$: Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{R}$: Körper der reellen Zahlen

$\mathbb{R}^+$: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$\mathbb{R}_0^+$: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$[a, b]$: $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$(a, b]$: $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a, b)$: $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

(a, b) : $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$\mathbb{C}$: Körper der komplexen Zahlen

für $z \in \mathbb{C}$ bezeichnet

$\operatorname{Re}(z)$: Realteil von z

$\operatorname{Im}(z)$: Imaginärteil von z

$\bar{z}$: komplex Konjugierte zu z

i : $:= \sqrt{-1}$

$\mathbb{K}$: Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$;

bestimmte Aussagen gelten sowohl unter
Zugrundelegung von $\mathbb{R}$ als auch von $\mathbb{C}$;
dann schreiben wir $\mathbb{K}$;

Vektorräume und Matrizen

$\mathbb{K}^n$: n -dimensionale Spaltenvektorraum über $\mathbb{K}$

$\mathbb{K}^n$: n -dimensionale Spaltenvektorraum über $\mathbb{K}$

$M_{n,n}$: Menge der $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{K}$

I_n : Einheitsmatrix in $M_{n,n}$

e_i : i -te Einheitsvektor in $\mathbb{K}^n$

$\det(A)$: Determinante für $A \in M_{n,n}$

$(x_1, \dots, x_n)'$: Transponierte des Zeilenvektors $(x_1, \dots, x_n)$

y' : Transponierte des Spaltenvektors $y \in \mathbb{K}^n$

A' : Transponierte der Matrix $A \in M_{n,n}$

Normen für Zahlen und Vektoren

$| \cdot |$: für $x \in \mathbb{R}$, $|x| := \sqrt{x^2}$
 : für $z \in \mathbb{C}$, $|z| := \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$
 : für $y \in \mathbb{R}^n$, $|y| := \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$

Funktionen und Abbildungen

$f: U \rightarrow V$, $x \mapsto f(x)$

: bezeichnet eine Abbildung mit Definitionsbereich U und Bildbereich V ;
 durch f wird jedem $x \in U$ das Bild $f(x) \in V$ zugeordnet.

f_x : Abkürzung für $f(x)$

$g \circ f$: Komposition von zwei Abbildungen g und f

id_C : Identität auf C

$f|_A$: induzierte Abbildung; d.h. ist eine Abbildung f von X nach Y gegeben, und ist $A \subset X$ und $B \subset Y$ mit $f(x) \in B$ für alle $x \in A$,
 dann heißt $f|_A : A \rightarrow B$, $a \mapsto f(a)$ induzierte Abbildung.

f^{-1} : Umkehrabbildung

Abbildungen und Mengen

$f(A)$: Bildmenge von A unter f

$f^{-1}(B)$: Urbildmenge von B unter f

Funktionenräume

C : Menge der stetigen Funktionen von $[-1,0]$ nach $\mathbb{R}$

C^+ : Menge der stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$

$\tilde{C}$: Menge der beschränkten Funktionen von $[-1,0]$ nach $\mathbb{R}$

$C([a,b],\mathbb{R})$: Menge der stetigen Funktionen von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$

Normen auf Funktionenräumen

$| \cdot |$: bedeutet für jeden Funktionenraum die Supremumsnorm

Operatorenräume

- $L(B)$: Menge der beschränkten linearen Operatoren über einem Banach-Raum
- B_0 : Menge der stetigen Operatoren über einem Banach-Raum B , die einer globalen Lipschitz-Bedingung genügen und für die $h_0 = 0$ gilt. d.h. es existiert zu jedem $h \in B_0$ eine Konstante $L(h) \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $x, y \in B_0$ $|hx - hy| \leq L|x - y|$ gilt.

Normen für Operatorenräume

- $\| \cdot \|$: für $h \in B_0$, $\|h\| := \sup\{|hx|/|x| \mid x \in B \setminus \{0\}\}$
- $|T|$: für $T \in L(B)$, $|T| := \sup\{|Tx|/|x| \mid x \in B \setminus \{0\}\}$

Ableitungen

- $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dt}, \frac{d}{d\theta}, \frac{d}{da}, \frac{d}{d\tau}$: Ableitung nach reellen Variablen
- $\frac{d}{dz}$: komplexe Ableitung
- $\frac{\partial}{\partial y} F$: Funktionalmatrix der Funktion $F: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, y \mapsto F(y)$
- $\frac{\partial}{\partial y_i} f$: partielle Ableitung der Funktion $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, y \mapsto f(y)$
- $\dot{x}$: Ableitung der Funktion x nach einer reellen Variablen

Sonstige Bezeichnungen und spezielle Zahlen

- $A \times B$: kartesisches Produkt der Mengen A und B
- $\emptyset$: leere Menge
- $cl(A)$: topologische Abschluß der Menge A
- $Rd(A)$: topologischer Rand der Menge A
- $A \oplus B$: Direkte Summe der Vektorräume A und B
- π : Kreiszahl
- e : Euler-Zahl
- $varX(a, b)$: Variation der Funktion X auf dem Intervall $[a, b]$

Literaturverzeichnis

- [01] Allen, R., G., D.
Mathematical Economics
Mac Millan and Co., London, 1957;
- [02] Bellman, Richard; Cooke, Kenneth, L.
Differential Difference Equations
Academic Press Inc., New York, London, 1963;
in der Reihe: Mathematics in Science and Engineering
- [03] Bothwell, Frank, E.
The Method of Equivalent Linearization
Econometrica, Vol.20, 1952, 269-283
- [04] Brayton, Robert, K.
Bifurcation of Periodic Solutions in a Nonlinear Difference
Differential Equation of Neutral Type
Quarterly of Applied Mathematics, Vol.24, 1966, 215-224
- [05] Carr, Jack
Applications of Centre Manifold Theory
Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1981.
ISBN 3-540-90577-4
- [06] Cronin, Jane
Differential Equations
Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1980;
ISBN 0-8247-6819-1
- [07] Deimling, Klaus
Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade
Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1974;
in der Reihe: Hochschultext; ISBN 3-540-06888-0
- [08] Doetsch, Gustav
Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-
Transformation
Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, 1976

- [09] De Oliveira, J.C.
Hopf Bifurcation for Functional Differential Equations
Nonlinear Analysis -- Theory, Methods and Applications,
Vol.4, 1980, 217-229
- [10] Dunford, Nelson; Schwartz, Jacob, T.
Linear Operators, Part I, General Theory
Interscience Publishers Inc., New York;
John Wiley and Sons Inc.;
in der Reihe: Pure and Applied Mathematics 1957
- [11] Eisenack, Günther; Fenske, Christian
Fixpunkttheorie
Bibliographisches Institut Mannheim, Wien, Zürich;
BI Wissenschaftsverlag, Zürich, 1978;
ISBN 3-411-01534-9
- [12] Fichtenholz, G.M.
Differential- und Integralrechnung, Band III
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964 (DDR)
- [13] Fradellos, G.; Evans, F.,J.
Contributions to Qualitative Analysis of Non-Linear Economic
Systems
in: Models and Decision Making in National Economies;
eds.: Janssen, J.,L.; Pau, L.,F.; Strassak, A.;
North Holland Publishing Comp., 1979;
- [14] Frisch, Ragnar; Holme, Harald
The characteristic solution of a mixed difference and
differential equation occurring in economic dynamics
Econometrica, Vol.3 225-239 , 1935
- [15] Goodwin, Richard, M.
The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business
Cycles
Econometrica, Vol.19, 1951, 1-17

- [24] Henry, Daniel
Linear Autonomous Neutral Functional Differential Equations
Journal of Differential Equations, Vol.15, 1974, 106-128;
- [25] Kato, T.
Perturbation Theory for Linear Operators
Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1966
- [26] Kaplan, James, L.; Yorke, James, A.
Ordinary Differential Equations which Yield Periodic
Solutions of Differential Delay Equations
Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.48,
1974, 317-324
- [27] Nussbaum, Roger, D.
Periodic Solutions of some nonlinear Autonomous Functional
Differential Equations
Journal of Differential Equations, Vol.14, 1973, 360-394
- [28] Nussbaum, Roger, D.
Periodic Solutions of some nonlinear Autonomous Functional
Differential Equations
Anali di Matematica Pura ed App., Vol.101, 1974, 263-306;
- [29] Nussbaum, Roger, D.
Periodic Solutions of Special Differential-Delay Equations:
An Example in Nonlinear Functional Analysis
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 81A, 1978,
131-151
- [30] Nussbaum, Roger, D.
Uniqueness and Nonuniqueness for Periodic Solutions of
$$x' = -g(x(t-1))$$

Journal of Differential Equations, Vol.34, 1979, 25-54
- [31] Preisenberger, Markus
Das Modell von Goodwin - Untersuchung einer nichtlinearen
Differentialgleichung
Diplomarbeit an der Technischen Universität München, 1980;

- [32] Schumacher, Konrad
Hopf bifurcation with constraints
Universität Heidelberg, Preprint 180, 1982
Journal of Nonlinear Analysis - TMA Vol.7. No.12. 1983.
1389-1409
- [33] Strotz, R.,H.; Mc Anulty; Naines, J.,B.,Jr.
Goodwins Nonlinear Theory of the Business Cycle;
An Electro-Analog Solution
Econometrica, Vol.21, 1959, 390-411
- [34] Taylor, A.E.
Introduction to the Theory of Functional Analysis
John Wiley New York, 1964
- [35] Uebe, Götz
Das Konjunkturmodell von Goodwin
Seminararbeit S.S. 1964 Universität Bonn
- [36] Wright, E.,M.
A Nonlinear Difference Differential Equation
J. Reine und Angewandte Mathematik, Bd. 194, 1955, 66-97
- [37] Uebe, Götz; Huber, Georg; Fischer, Joachim;
Bibliographie makro-ökonomischer Modelle
Microfiche-Ausgabe; Technische Universität München 1984

Lebenslauf

Name	Markus Preisenberger
Geburtsdatum	01.02.1956
Geburtsort	München

Schulbildung

1962 - 1966	Volksschule in München
1966 - 1975	Erasmus-Grasser-Gymnasium in München
1975	Abitur

Studium

1975 - 1980	Technische Universität in München Mathematik und Physik
1980	Diplom in Mathematik
seit Sommersemester 1983	Promotionsstudium in München an der Ludwig-Maximilians-Universität

Berufliche Tätigkeiten

1980 - 1982	wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Hochschule der Bundeswehr in Hamburg
1983 - 1984	wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Technischen Universität in München
1984	Laboringenieur bei der Firma Siemens

